Mic$\hbar$ael Flohr
Annekathrin Müller-Lohmann
31. Oktober 2006 (Abgabe 7. November 2006)

DER FREIE PROPAGATOR

In der Vorlesung haben wir bereits die freie (oder Gaußsche) Feldtheorie besprochen. Ihre Bewegungsgleichungen entsprechen der Klein-Gordon-Gleichung, deren Lösungen ebene Wellen sind. Aus dem Pfadintegral:

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi) + J(x)\varphi(x)\right]}, \tag{1}$$

folgte so die bestimmende Gleichung für den Propagator in den freien Feldtheorie:

$$-(\Box + m^2)D(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)\,. \tag{2}$$

Dies lässt sich wiederum im Impulsraum mit Hilfe der Integraldarstellung der Deltafunktion einfach lösen zu:

$$D(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{3}$$

Wir wollen uns auf diesem Übungszettel mit einigen Eigenschaften des Propagators beschäftigen.

[H1] *Dimensionenanalyse* **[1+2 pts]**

Im Folgenden wollen wir nur noch in den sogenannten “natürlichen Einheiten” rechnen, d.h. wir setzen $\hbar = c = 1$. Damit wechseln wir von 4 verschiedenen Einheiten ($[t] = s$, $[l] = m$, $[E] = eV$ und $[m] = g$) zu einer einzigen, der Einheitsmasse. Damit ist die physikalische Dimension eines Objektes (z.B. Feldes oder Parameters) jetzt die Massendimension.

(a) Bestimme die Dimension eines freien skalaren Feldes ϕ in $d+1$ Raum-Zeit-Dimensionen mit Hilfe der kanonischen Kommutatorrelationen für $\phi(x)$ und $\Pi(x)$.

(b) Betrachte die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \sum_{n=2}^{N} a_n\phi^n \tag{4}$$

in $d+1$ Dimensionen.

(i) Was ist die Dimension des Lagrangians, der Wirkung und der Koeffizienten a_n?

(ii) Warum gilt in jeder Raum-Zeit-Dimension $[a_2] = 2$? (*Hinweis:* Überprüfe daran Deine Ergebnisse.)

[H2] *Eigenschaften des freien Propagators* **[1+4+1 pts]**

Betrachte den freien Propagator in $(3+1)$-Raum-Zeit-Dimensionen.:

$$D(x) = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})}\theta(x^0) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})}\theta(-x^0)\right]\,. \tag{5}$$

(a) Was beschreibt $D(x)$ physikalisch?

(b) Zeige, dass $D(x)$ für raumartige Abstände (d.h. $x_\mu x^\mu < 0$, also z.B. $x_0 = 0$) exponentiell abfällt. (*Hinweis:* Benutze dazu die folgenden Schritte:)

(i) Benutze Kugelkoordinaten um zu zeigen:

$$D(x) = \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{k^2+m^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\,. \tag{6}$$

(ii) Beachte, dass der Integrand in (6) u.a. einen Verzweigungsschnitt entlang der imaginären Achse von im bis $i\infty$ besitzt. Falte daher die Integrationskontur um den Schnitt und substituiere $k = \mathrm{i}(m+y)$. Zeige so, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{k^2+m^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} = 2 \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-mr\cosh t} \,. \tag{7}$$

(iii) Identifiziere das Ergebnis (7) als Besselfunktion und schlage ihr Verhalten für große r nach. Oder führe nun die Differentiation nach r aus und erhalte nach geeigneter Substitution:

$$D(x) = -\frac{\mathrm{i}m}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-mr\sqrt{s^2+1}} \,. \tag{8}$$

(iv) Jetzt entwickele den Integranden für kleines s und finde (*Hinweis:* hier steckt ein Gaußsches Integral drin)

$$D(x) = \frac{m^2}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2(mr)^3}} \mathrm{e}^{-mr} \,, \tag{9}$$

dessen abfallendes Verhalten offensichtlich ist.

(c) Vergleiche das Verhalten von $D(x)$ für x innerhalb und außer halb des Lichtkegels. (*Hinweis:* Eine grobe Verhaltensanalyse geht auch ohne Integration. Verwende dazu eine geeignete Wahl von $\theta(0)$.)

[H3] *Der Propagator in einer* $(1+1)$*-dimensionalen Raum-Zeit* **[4+2+1 pts]**

Berechne den Propagator $D(x)$ in einer freien Feldtheorie in $(1+1)$ Dimensionen.

(a) Ausgehend von

$$D(x) = \int \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \,, \tag{10}$$

führe das Integral über k_0 aus. Dazu skizziere den Integrationsweg in der komplexen Ebene (inkl. Polstellen) und kommentiere Dein Vorgehen.

(b) Aus (a) erhalten wir mit $\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$:

$$D(x) = -\mathrm{i} \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)2\omega_k} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - kx)} \theta(x^0) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k t - kx)} \theta(-x^0) \right] \,. \tag{11}$$

Setze nun $x^0 = 0$ und wende Aufgabe **[H2]** an.

(c) Wie verhält sich also $D(x)$ für große x?