Mic$\hbar$ael Flohr
Annekathrin Müller-Lohmann

Gravitation

07. November 2006 (Abgabe 14. November 2006)

EINFACHE BETRACHTUNGEN ZUR GRAVITATION

In der Vorlesung haben wir bereits den Propagator für das freie skalare Feld und das freie massive Vektor-Mesion kennengelernt. In dieser Übung soll der Propagator für ein Spin-2 Feld hergeleitet werden, das Gravitation beschreiben könnte. Wie in der Vorlesung machen wir uns das Leben ein klein wenig einfacher, indem wir dem Feld eine Masse geben.

[H1] *Einstein-Propagator* **[1+2+4+2 pts]**

Ein Spin-2 Teilchen hat $(2 \cdot 2 + 1) = 5$ Freiheitsgrade für seine Polarisation. Diese werden durch fünf Polarisationstensoren $\varepsilon^{(a)}_{\mu\nu}$, $a = 1, \ldots, 5$, die symmetrisch in den Indizes μ, ν sind, angegeben. Sie müssen desweiteren die Bedingungen

$$k^\mu \varepsilon^{(a)}_{\mu\nu} = 0\,, \quad g^{\mu\nu}\varepsilon^{(a)}_{\mu\nu} = 0$$

erfüllen. Die erste ist das Analog der Stromerhaltung, die zweite besagt, dass der Tensor Spurfrei ist.

(a) Wieviele Komponenten hat ein symmetrischer Lorentz-Tensor? Wieviele Komponenten bleiben übrig, wenn die obigen Bedingungen verwendet werden?

(b) Wir müssen die Größe

$$\sum_a \varepsilon^{(a)}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{(a)}_{\lambda\sigma}(k) \tag{1}$$

konstruieren. Es sei die positive Komponente $\varepsilon^{(a)}_{12}(k)\varepsilon^{(a)}_{12}(k) = 1$ gesetzt. Schreibe die allgemeinste Form für (1) hin, in der nur die Produlte aus den Größen $G_{\mu\nu}$ und $k_\mu k_\nu$ auftreten. Beachte, dass (1) invariant unter dem Austausch $\mu\nu \leftrightarrow \lambda\sigma$ sein muss.

(c) Wende die obigen Bedingungen an, insbesondere die erste, um zu zeigen, dass (1) die Form

$$\sum_a \varepsilon^{(a)}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{(a)}_{\lambda\sigma}(k) = (G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}G_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}$$

hat. Das Gesamtvorzeichen und die Proportionalitätskonstante bestimmt man, indem man den Spezialfall $\mu = \lambda = 1$ und $\nu = \sigma = 2$ ansieht. Der Propagator des massiven Gravitons ergibt sich damit zu

$$D_{\mu\nu,\lambda\sigma}(k) = \frac{(G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}G_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}}{k^2 - m^2}\,.$$

(d) Folgere nun dass im Gegensatz zum Fall des massiven Spin-1 Teilchens in der Vorlesung das Spin-2 Teilchen zu einer anziehenden Kraft führt.

[H2] *Andere Universen* **[3 pts]**

Berechne das Analogon des $1/r^2$ Gesetzes in einem $(2+1)$-dimensionalen und allgemein in einem $(D+1)$-dimensionalen Universum. Dies bedeutet,

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^D k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\vec{k}^2 + m^2}$$

zu berechnen.