Mic$\hbar$ael Flohr
Annekathrin Müller-Lohmann

DER KANONISCHE FORMALISMUS

In der Vorlesung wird die QFT hauptsächlich durch den Pfadintegral-Formalismus eingeführt. Historisch gesehen wurde die QFT zunächst durch die kanonische Quantisierung entwickelt. Dieser alternative Zugang ist auch heute noch wichtig, da es Resultate gibt, die man im kanonischen Formalismus wesentlich leichter sieht, als im Pfadintegral-Formalismus. Auch ist der kanonische Formalismus, trotz einiger Schwächen, mathematisch besser begründbar. Die folgenden Übungen sollen hierzu ein wenig Praxis vermitteln.
Zur Wiederholung: In der Vorlesung wurden die kanonischen Vertauschungsrelationen eingeführt,

$$[\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x}',t)] = [\partial_0\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x}',t)] = -\mathrm{i}\delta^{(D)}(\vec{x}-\vec{x}')\,.$$

Dies führte auf eine Fourier-Entwicklung des reellen skalaren Feldes der Form

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}}\left[a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + a^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right]$$

mit $\omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$. Die Fourier-Moden sind ihrerseits Operatoren, die die Vertauschungsregeln

$$[a(\vec{k}),a^\dagger(\vec{k}')] = \delta^{(d)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

erfüllen.

[H1] *Lorentz-Kovarianz* **[2+2+2 pts]**

Die Definition der Erzeuger und Vernichter wird von einigen Autoren etwas anders vorgenommen, und zwar via

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D 2\omega_k}\left[a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + a^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right]\,,$$

also ohne die Wurzel im Nenner. Hierbei ist natürlich $\omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$.

i. Zeige, dass für eine beliebige Funktion f gilt:

$$\int \mathrm{d}^4k\,\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)f(k^0,\vec{k}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k}f(\omega_k,\vec{k})\,.$$

ii. Argumentiere, dass das Integrationsmaß $\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k}$ ein Lorentz-invariantes Maß ist. *Hinweis*: Lorentz-Transformationen können das Vorzeichen von k^0 nicht ändern.

iii. Die so implizit definierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind also Lorentz-kovariant. Leite ihre Vertauschungsregeln her.

[H2] *Erwartungswerte* **[4 pts]**

Es sei H ein Hamilton-Operator $\int \mathrm{d}^D x\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^D x(\pi(\vec{x},t)\partial_0\varphi(\vec{x},t)-\mathcal{L})$. Berechne den Erwartungswert $\langle\vec{k}'|H|\vec{k}\rangle$, wobei $|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ ist.

[H3] *Komplexes skalares Feld* **[2+2+2 pts]**

Bis jetzt haben wir das reelle (oder hermitesche) skalare Feld betrachtet. Betrachte nun ein komplexes skalares Feld mit Lagrangedichte $\mathcal{L} = \partial\varphi^\dagger\partial\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi$.

i. Gib die Euler-Largrange Bewegungsgleichungen an, wobei $\varphi^\dagger$ und φ als unabhängige Variablen angesehen werden.

ii. Da φ nicht hermitesch ist, müssen wir unsere Definition des Feldes ersetzen durch

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}} \left[a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right] .$$

Zeige, dass die kanonischen Vertauschungsrelationen implizieren, dass die Paare $(a, a^\dagger)$ und $(b, b^\dagger)$ zwei unabhängige Sätze von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bilden.

iii. Berechne $\langle 0|\mathcal{T}(\varphi(x)\varphi^\dagger(0))|0\rangle$. *Hinweis*: Beachte, dass $\partial_0\varphi$ konjugiert ist zu $\varphi^\dagger$, nicht zu φ.

[H4] *Zeitordnung* **[4 pts]**

Wir betrachten ein beliebiges Feld A und nehmen $q^0 > 0$ an. Zeige, dass

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\mathcal{T}(A(x)A(0))|0\rangle\right) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|[A(x), A(0)]|0\rangle$$

ist, indem Du $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$ für einen vollständigen Satz $|n\rangle$ von Zuständen zwischen $A(x)$ und $A(0)$ auf der linken Seite einfügst. *Hinweis*: Verwende die Integraldarstellungen

$$\theta(t) = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - \mathrm{i}\epsilon}\,, \quad \theta(-t) = +\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + \mathrm{i}\epsilon}\,.$$