Mic$\hbar$ael Flohr
Annekathrin Müller-Lohmann

28. November 2006 (Abgabe 5. Dezember 2006)

SYMMETRIEN UND NOETHER-THEOREM

Symmetrien sind in der modernen theoretischen Physik in ihrer Wichtigkeit nicht zu unterschätzen. Sie bestimmen in erheblicher Weise die Form der physikalischen Gesetze, zum Beispiel die Form des Lagrangian. Symmetrien und Erhaltungsgrößen stehen in einer eins-zu-eins Beziehung, die über das Noether-Theorem vermittelt wird.

[H1] *Noether-Theorem* **[2+3 pts]**

Das Noether-Theorem wird gerne auch wie folgt formuliert: Wir nehmen an, die Wirkung sei invariant unter infinitesimalen Transformationen $\delta\varphi_a(x) = \theta^A V_a^A$, wobei die θ^A Parameter und die V_a^A Funktionen der Felder $\varphi_b(x)$ und möglicherweise deren Ableitungen $\partial_\mu\varphi_b(x)$ sind. Der Index A kann, muss aber nicht, über eine Basis von Generatoren einer Lie-Gruppe laufen. Man beachte, dass die Aussage, die Wirkung ändere sich nicht, gültig sein muss *ohne* dass wir die Bewegungsgleichungen verwenden! Schließlich werden die Euler-Lagrange-Gleichungen ja gerade daraus hergeleitet, dass die Variationen δS nach $\delta\varphi_a$ alle verschwinden (mit geeigneten Randbedingungen). In der Vorlesung wurde das Beispiel einer skalaren Feldtheorie mit interner $O(n)$ Symmetrie besprochen, und $\delta S = 0$ gilt gerade deshalb, weil die Wirkung aus Skalarprodukten von $O(n)$-Vektoren konstruiert wurde.

i. Wir betrachten nun eine Situation, in der die Parameter θ^A von der Position in der Raum-Zeit abhängen, $\theta^A = \theta^A(x)$, und $\delta\varphi_a(x) = \theta^A(x)V_a^A[\varphi_b(x), \partial_\mu\varphi_b(x)]$. Nun ist natürlich nicht mehr notwendigerweise $\delta S = 0$, aber wir wissen, dass die Variation der Wirkung für konstante θ^A verschwindet. Überlegen Sie, dass δS deshalb nur die Form

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x J^\mu(x)\partial_\mu\theta^A(x)$$

haben kann. Damit kann man den Strom $J^\mu(x)$ sehr einfach bestimmen, er ist einfach durch den Koeffizienten von $\partial_\mu\theta^A(x)$ gegeben.

ii. Berechnen Sie die $J^\mu(x)$ expilzit für die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\vec{\varphi})^2 - m^2\vec{\varphi}^2\right] - \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}^2)^2$$

aus der Vorlesung.

[H2] *Propagator* **[5 pts]**

In der Vorlesung wurde der Propagator $D_{ab}(x)$ für die skalare $O(n)$ Feldtheorie eingeführt. Zeigen Sie, dass dieser Propagator proportional zu δ_{ab} sein muss.

[H3] *Darstellungen* **[5 pts]**

Betrachten Sie eine Theorie mit interner $SO(3)$-Symmetrie. Konstruieren Sie den Lagrangian einer solchen Theorie mit einem Lorentz-skaleren Feld φ, das in einer fünf-dimensionalen Darstellung von $SO(3)$ transformiert, bis zu Termen vierter Ordnung. *Hinweise*: Es ist nützlich, φ als eine symmetrische, spurfreie 3×3 Matrix zu schreiben (warum?).