

WEITERES ZUR DIRAC-GLEICHUNG UND GAMMA-MATRIZEN

Hier üben wir noch ein paar Standard-Rechnungen im Zusammenhang mit γ -Matrizen. Im Prinzip ist die QED deshalb schwieriger, als die skalare Feldtheorie, weil man andauernd mit γ -Matrizen rumrechnen muss. Außerdem wollen wir unser Verständnis der Physik hinter der Dirac-Gleichung vertiefen.

[H1] Clifford-Algebra [5 pts]

Die Clifford-Algebra, die durch die Relation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ erzeugt wird, hat 16 linear unabhängige Elemente, die in der Vorlesung II, γ^μ , $\sigma^{\mu\nu}$, $\gamma^\mu\gamma^5$ und γ^5 genannt wurden. Zeigen Sie, dass die daraus gebildeten Bilinear-Ausdrücke $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ und $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ unter der Lorentz-Gruppe und der Parität wie ein Skalar, Vektor, Tensor, Pseudovektor und Pseudoskalar transformieren. *Hinweis:* Zum Beispiel ist $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \rightarrow \bar{\psi}(\mathbb{1} + \frac{1}{4}\omega\sigma)\gamma^\mu\gamma^5(\mathbb{1} - \frac{1}{4}\omega\sigma)\psi$ unter einer infinitesimalen Lorentz-Transformation, und $\rightarrow \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi$ unter der Parität. Wenn Sie diese Transformationen ausarbeiten, sehen Sie, dass sie einen axialen Vektor definieren.

[H2] Chiralität [3 pts]

Schreiben Sie die obigen Bilinear-Ausdrücke alle in ψ_L und ψ_R .

[H3] Dirac-Gleichung im Impulsraum [5 pts]

Im Impulsraum ist die Dirac-Gleichung einfach eine Matrix-Gleichung, $(\not{p} - m)\tilde{\psi}(p) = 0$. Lösen Sie diese Gleichung explizit, wobei Sie Rotationsinvarianz ausnutzen dürfen, so dass es reicht, die Gleichung für $\vec{p} = p\vec{e}_z$ zu lösen. Überprüfen Sie, dass für $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ in der Tat χ viel kleiner als ϕ für ein sich langsam bewegendes Elektron ist. Was geschieht bei sich schnell bewegenden Elektronen?

[H4] Nicht-Relativistische Approximation [3 pts]

Es sei für kleine Geschwindigkeiten χ sehr viel kleiner als ϕ . Finden Sie eine approximative Gleichung für ϕ .

[H5] Relativistische Elektronen [3 pts]

Ein relativistisches Elektron bewege sich entlang der z -Achse. Führen Sie eine Rotation um die z -Achse aus, studieren Sie also den Effekt von $\exp(-\frac{i}{4}\omega\sigma^{12})$ auf $\tilde{\psi}(p)$. Interpretieren Sie Ihr Resultat mit Hilfe von ψ_L und ψ_R .