Vektorraum

Eine nichtleere Menge $\mathbb{V}$, für deren Elemente eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ mit Zahlen eines Körpers $\mathbb{K}$ erklärt ist, heißt *Vektorraum über* $\mathbb{K}$ oder auch *linearer Raum*, wenn folgende Axiome für alle $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

1. Kommutativität der Addition: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$
2. Assoziativität der Addition: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$
3. Existenz des Nullvektors: $\vec{v}_1 + \vec{o} = \vec{v}_1, \quad \vec{o} \in V$
4. Existenz des inversen Vektors: $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_1) = 0$
5. $1\vec{v}_1 = \vec{v}_1, \quad 1 \in \mathbb{K}$
6. $\alpha(\beta\vec{v}_1) = (\alpha\beta)\vec{v}_1$
7. $(\alpha + \beta)\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_1$
8. $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2$

Die Elemente von $\mathbb{V}$ heißen *Vektoren*. Ein n-dimensionaler Vektorraum $\mathbb{V}^{(n)}$ besitzt eine *Basis*, also ein n-Tupel von Vektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, die ihn erzeugen. Die Basisvektoren sind linear unabhängig, d.h. jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}^{(n)}$ ist als Linearkombination der $\vec{e}_i$ darstellbar

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i.$$

Produkte

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$, $\vec{u}$ mit Komponenten v_i, u_i lautet

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen besteht aus der Menge aller geordneten Paare

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

In der klassischen Mechanik wird die Zusammensetzung von Systemen durch das kartesische Produkt der Phasenräume beschrieben.

Seien $\{\vec{e}_i\}$ und $\{\vec{h}_j\}$ die Basissysteme zweier n- und m-dimensionaler Vektorräume $\mathbb{V}^{(n)}$ und $\mathbb{V}^{(m)}$, dann bezeichnet der Ausdruck

$$\mathbb{V}^{(n)} \otimes \mathbb{V}^{(m)} \sim \mathbb{V}^{(n \cdot m)},$$

der aus den Basisvektoren $\vec{e}_i \otimes \vec{h}_j$ aufgespannt wird, das **Tensorprodukt** der beiden Vektorräume $\mathbb{V}^{(n)}$ und $\mathbb{V}^{(m)}$. Die Dimension des Produktraums beträgt $n \cdot m$. In der Quantenmechanik wird die Zusammensetzung von Systemen durch das Tensorprodukt ihrer Hilberträume beschrieben. Man beachte, dass sich der allgemeine Vektor $\vec{\psi} = \sum_i \psi_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{h}_i$ eines Tensorproduktraums nicht als Produkt der Basisvektoren $\vec{e}_i$ und $\vec{h}_j$, sondern nur als lineare Superposition schreiben lässt.

Matrizen

Eine Matrix ist ein $m \times n$-Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten der Form

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

Matrizen sind als Operatoren auf Vektorräumen auffassbar und bilden Vektoren auf Vektoren ab (Rechenschema „Zeile mal Spalte“)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Diracsche Bra-ket-Notation

(Spalten-) Vektor:	$\|\psi\rangle$,
(Zeilen-) Vektor (im dualen Vektorraum):	$\langle\phi\|$ (falls $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$, dann $\langle\phi\| \sim \vec{\psi}^*$),
Skalarprodukt:	$\langle\phi\|\psi\rangle$,
Erwartungswert des Operators $\hat{A}$:	$\langle\hat{A}\rangle = \langle\phi\|\hat{A}\|\psi\rangle$

Bausteine zur Axiomatik

Physikalische Interpretation	Mathematische Struktur
Zustandsraum physikalischer Objekte	Hilbertraum $\mathcal{H}$ (Vektorraum mit Innenprodukt-Norm)
physikalischer (Objekt-) Zustand	Vektor $\|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (genauer: „Strahl“ $\lambda\|\psi\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$)
Zusammensetzung von Objekten	Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
Messgrößen (Observablen)	hermitesche Operatoren $\Rightarrow$ Eigenwertgleichung $\hat{A}\|\psi\rangle = a_i\|\psi\rangle$
Zeitentwicklung (Dynamik)	U(1)-Transformation $\Rightarrow$ Schrödingergleichung $i\frac{d}{dt}\|\psi\rangle = \hat{H}\|\psi\rangle$
Übergangswahrscheinlichkeit von i nach f	$p_{i\to f} = \|\langle\psi_f\|\psi_i\rangle\|^2$