

[K1] • Mit  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{X}{x_0} + i\frac{P}{p_0})$  ist  $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{X}{x_0} - i\frac{P}{p_0})$ . Damit ist  $[a, a^+] = \frac{1}{2}(-\frac{i}{x_0 p_0}[X, P] + \frac{i}{x_0 p_0}[P, X]) = \frac{i}{x_0 p_0}[P, X] = \frac{1}{x_0 p_0}\hbar \stackrel{!}{=} 1$ . Also ist  $p_0 = \frac{\hbar}{x_0}$ .

• Es sei  $H \propto a^+ a$ . Der Grundzustand ist gegeben durch  $a|\Psi_0\rangle = 0$ . Im Ortsraum ist diese Bedingung  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{X}{x_0} + i\frac{x_0}{\hbar}P)\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{x_0} + x_0\partial_x)\Psi_0(x) = 0$ . Das ergibt

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi_0(x) &= -\frac{1}{x_0} x \Psi_0(x) \\ \frac{d\Psi_0}{\Psi_0} &= -\frac{x}{x_0} dx \\ \log \Psi_0 &= -\frac{1}{2x_0^2} x^2 + const \\ \Psi_0(x) &= C \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2), \end{aligned}$$

wobei  $C$  eine Konstante ist, die durch Normierung bestimmt werden muß. Da die Wellenfunktion eindeutig nur bis auf eine globale Phase ist, können wir  $C > 0$  reell annehmen. Normierung:  $\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = C^2 \int dx e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} = C^2 \sqrt{\pi} x_0 \stackrel{!}{=} 1$ . Also ist  $C = (\sqrt{\pi} x_0)^{-\frac{1}{2}}$ . Damit ergibt sich

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2}.$$

• Das Schwankungsquadrat können wir entweder mit dem angegebenen Integral ausrechnen, oder wir drücken  $X$  durch  $a, a^+$  aus, nämlich  $X = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a^+ + a)$ . Offensichtlich ist  $\langle \Psi_0 | X | \Psi_0 \rangle \sim \langle \Psi_0 | (a^+ + a) | \Psi_0 \rangle = 0$ . Es verbleibt noch, den Erwartungswert  $\langle \Psi_0 | X^2 | \Psi_0 \rangle = \frac{x_0^2}{2} \langle \Psi_0 | (a^+ a^+ + a^+ a + a a^+ + a a) | \Psi_0 \rangle$  zu berechnen. Der erste und letzte Term verschwinden, und mit  $a a^+ = [a, a^+] + a^+ a$  ergibt sich  $\langle \Psi_0 | X^2 | \Psi_0 \rangle = \frac{x_0^2}{2} \langle \Psi_0 | (2a^+ a + 1) | \Psi_0 \rangle = \frac{x_0^2}{2} \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \frac{x_0^2}{2}$ . Also ist  $(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle = \frac{x_0^2}{2}$ . (15 P.)

[K2] • Es ist  $(\vec{L} \times \vec{L}) \cdot \vec{L} = \varepsilon_{ijk} L_i L_j L_k$ . Wer keine doppelten  $\varepsilon$ -Tensoren ausrechnen möchte, schreibt das einfach aus und schaut genau hin:

$$\begin{aligned} (\vec{L} \times \vec{L}) \cdot \vec{L} &= L_1 L_2 L_3 - L_2 L_1 L_3 \\ &+ L_2 L_3 L_1 - L_3 L_2 L_1 \\ &+ L_3 L_1 L_2 - L_1 L_3 L_2 \\ &= [L_1, L_2] L_3 + [L_2, L_3] L_1 + [L_3, L_1] L_2 \\ &= i\hbar(L_3^2 + L_1^2 + L_2^2) \\ &= i\hbar(\vec{L})^2. \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte einfach  $i\hbar^3 \ell(\ell + 1)$  mit  $\ell \in \mathbb{Z}_+$ . (5 P.)

[K3] • Alle Pauli-Matrizen haben die gleichen Eigenwerte  $\lambda_{\pm} = \pm 1$ . Für das Produkt mit einem Einheitsvektor ergibt sich

$$n^i \sigma_i = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Mit  $\det(n^i \sigma_i - \lambda \mathbb{1}) = (\cos \theta - \lambda)(-\cos \theta - \lambda) - \sin^2 \theta = -\cos^2 \theta + \lambda^2 - \sin^2 \theta = \lambda^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$  ergibt sich, daß auch das Produkt die Eigenwerte  $\lambda_{\pm} = \pm 1$  hat.

- Es ist zu prüfen, ob  $\chi$  ein Eigenvektor von  $n^i \sigma_i$  ist:

$$\begin{aligned}
n^i \sigma_i \chi &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} - \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin(\theta - \frac{\theta}{2}) e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\
&= +\chi.
\end{aligned}$$

Hierbei wurden in der vorletzten Zeile die Standard-Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen verwendet. (10 P.)

- [K4] • Mit den angegebenen Abkürzungen macht man den üblichen Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & : x < 0 \\ Ce^{i\kappa x} + De^{-i\kappa x} & : x > 0 \end{cases}.$$

Die Anschlußbedingungen für  $x = 0$  ergeben die einfachen Gleichungen  $A + B = C + D$  und  $ik(A - B) = i\kappa(C - D)$ . Daraus erhält man leicht das System

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\kappa}{k} & 1 - \frac{\kappa}{k} \\ 1 - \frac{\kappa}{k} & 1 + \frac{\kappa}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Das Teilchen kommt von links, also ist  $D = 0$ . Damit ist die Wellenfunktion gegeben als

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}C[(1 + \frac{\kappa}{k})e^{ikx} + (1 - \frac{\kappa}{k})e^{-ikx}] & : x < 0 \\ Ce^{i\kappa x} & : x > 0 \end{cases}.$$

- Der Strom ist  $J \propto \bar{\psi} \partial \psi - \psi \partial \bar{\psi}$ . Für den allgemeinen Fall erhält man damit  $J \propto 2ik(|A|^2 - |B|^2)$  für  $x < 0$ , und  $2i\kappa|C|^2$  für  $x > 0$ . Ausrechnen ergibt dann

$$J \propto \begin{cases} 2ik \left[ \frac{1}{4}(1 + \frac{\kappa}{k})^2 - \frac{1}{4}(1 - \frac{\kappa}{k})^2 \right] |C|^2 & = \frac{2ik}{4k^2} |C|^2 [(k + \kappa)^2 - (k - \kappa)^2] \\ & = 2i|C|^2 \frac{1}{4k} [4k\kappa] = 2i\kappa|C|^2 & : x < 0 \\ 2i\kappa|C|^2 & : x > 0 \end{cases}.$$

Offensichtlich ist der Strom erhalten, wie es sein soll. Das Verhältnis von reflektiertem bzw. durchlaufendem Strom zum einlaufenden Strom definiert natürlich den Reflektions- bzw. Transmissionskoeffizienten. Es ergibt sich  $R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left( \frac{k - \kappa}{k + \kappa} \right)^2$ , und  $T = \frac{\kappa}{k} \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4k\kappa}{(k + \kappa)^2}$ . Probe: Tatsächlich ist  $R + T = 1$ . (10 P.)

- [K5] • Der Hamiltonoperator hat in der Energie-Basis die Form  $H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}$ . Für die Zeitentwicklung gilt  $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\Psi(0)\rangle$ , wobei wir für  $t = 0$  einfach ansetzen:  $|\Psi(0)\rangle = \psi_1|\Lambda_1\rangle + \psi_2|\Lambda_2\rangle$ . Also ist die Zeitentwicklung

$$|\Psi(t)\rangle = \psi_1 e^{-i\omega_1 t} |\Lambda_1\rangle + \psi_2 e^{-i\omega_2 t} |\Lambda_2\rangle = e^{-i\omega_2 t} (\psi_1 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} |\Lambda_1\rangle + \psi_2 |\Lambda_2\rangle).$$

- Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist  $w(t) = |\langle \phi | \Psi(t) \rangle|^2$ . Hier ist  $\langle \phi | = \langle \Lambda_1 | \bar{\phi}_1 + \langle \Lambda_2 | \bar{\phi}_2$ . Die Energie-Basis ist orthonormal, so daß Ausmultiplizieren auf

$$\begin{aligned}
w(t) &= |\bar{\phi}_1 e^{-i\omega_1 t} \psi_1 + \bar{\phi}_2 e^{-i\omega_2 t} \psi_2|^2 \\
&= |\phi_1 \psi_1|^2 + |\phi_2 \psi_2|^2 + \bar{\phi}_1 \phi_2 \psi_1 \bar{\psi}_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \phi_1 \bar{\phi}_2 \bar{\psi}_1 \psi_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \\
&= |\phi_1 \psi_1|^2 + |\phi_2 \psi_2|^2 + \frac{b}{2} e^{i\alpha} e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + \frac{b}{2} e^{-i\alpha} e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}
\end{aligned}$$

führt, wobei in der letzten Zeile die Abkürzung  $2\bar{\phi}_1\phi_2\psi_1\bar{\psi}_2 \equiv be^{i\alpha}$  verwendet wurde. Wir erhalten schließlich

$$w(t) = |\phi_1\psi_1|^2 + |\phi_2\psi_2|^2 + b \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \alpha).$$

Offensichtlich kann man nur die Energie-Differenz  $\hbar(\omega_2 - \omega_1)$  experimentell bestimmen. (10 P.)

[K6] • Der Gesamtdrehimpuls ist  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Sowohl  $L_i$  wie auch  $S_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , erfüllen eine Drehimpulsalgebra, aber  $[L_i, S_j] = 0$ . Also ist  $[J_i, J_j] = [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k + 0 + 0 + i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k = i\hbar\varepsilon_{ijk}(L_k + S_k) = i\varepsilon_{ijk}J_k$ .

• Der Höchstgewichtszustand  $|j, m_j = j\rangle$  ist eindeutig, nämlich  $|j, j\rangle = |\ell, \ell, s, s\rangle$ . Also erhalten wir

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle.$$

Anwenden von  $J_- = L_- + S_-$  aus  $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$  ergibt

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{1 \cdot 2 - 1 \cdot 0} |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})} |1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Der andere mögliche Zustand mit  $m_j = \frac{1}{2}$  muß dazu orthogonal sein:

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Am einfachsten ist es, wenn man nun von unten nach oben arbeitet, da der Tiefstgewichtszustand  $|j, m_j = -j\rangle$  ebenfalls eindeutig gegeben ist als  $|j, -j\rangle = |\ell, -\ell, s, -s\rangle$ . Also ist er hier

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Anwenden von  $J_+ = L_+ + S_+$  liefert

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{1}{2})} |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0} |1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2})} |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Der letzte verbleibende Zustand muß wieder dazu orthogonal sein:

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle.$$

Möglicherweise machen wir einen Fehler in der globalen Phase, da nicht garantiert ist, daß vom Tiefstgewichtszustand auszugehen auf die selbe Art in der Mitte ankommt, wie vom Höchstgewichtszustand auszugehen. Daher eine Probe:

$$\begin{aligned} J_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}} [\sqrt{2} |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1} |1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle] + \sqrt{\frac{2}{3}} [\sqrt{1} |1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + 0] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

was das korrekte Ergebnis ist, da  $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})} = 1$  ist. (15 P.)

[K7] • Einsetzen des Yukawa-Potentials  $V(r) = \frac{\kappa}{r} e^{-\frac{r}{r_0}}$  ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{m^2 \kappa^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty dr \left[ e^{r(iq - \frac{1}{r_0})} - e^{r(-iq - \frac{1}{r_0})} \right] \right|^2 \\
&= \frac{m^2 \kappa^2}{\hbar^4 q^2} \left| \frac{e^{r(iq - \frac{1}{r_0})}}{iq - \frac{1}{r_0}} \Big|_0^\infty - \frac{e^{r(-iq - \frac{1}{r_0})}}{-iq - \frac{1}{r_0}} \Big|_0^\infty \right|^2 \\
&= \frac{m^2 \kappa^2}{\hbar^4 q^2} \left| \frac{-1}{iq - \frac{1}{r_0}} - \frac{-1}{-iq - \frac{1}{r_0}} \right|^2 \\
&= \frac{m^2 \kappa^2}{\hbar^4 q^2} \left| \frac{iq + \frac{1}{r_0} - (-iq + \frac{1}{r_0})}{\frac{1}{r_0} + q^2} \right|^2 \\
&= \frac{4m^2 \kappa^2}{\hbar^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{r_0} + q^2\right)^2} \\
&= (2m\kappa)^2 \left( \frac{1}{\frac{\hbar^2}{r_0^2} + \hbar^2 q^2} \right)^2.
\end{aligned}$$

• Einfaches Ausmultiplizieren ergibt sofort  $q^2 = (\vec{k}_i - \vec{k}_f)^2 = \vec{k}_i^2 + \vec{k}_f^2 - 2\vec{k}_i \cdot \vec{k}_f \cos \vartheta = 2k^2(1 - \cos \vartheta) = (2k \sin \frac{\vartheta}{2})^2$ . Hierbei wurde beachtet, daß die Beträge von einlaufendem und auslaufendem Impuls aufgrund der Energieerhaltung gleich sind, d.h.  $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_f| = k$ . Außerdem haben wir  $1 - \cos \vartheta = 1 - \cos(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}) = 1 - (\cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$  vereinfacht. Schließlich erhalten wir mit  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  das gewünschte Ergebnis  $q^2 = 8 \frac{Em}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ .

• Dies setzen wir jetzt einfach in unser Ergebnis des differentiellen Wirkungsquerschnittes ein, und erhalten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2m\kappa)^2 \left( \frac{1}{\frac{\hbar^2}{r_0^2} + 8Em \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 = \left( \frac{\kappa}{\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} + 4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2,$$

also einen Ausdruck als Funktion der Energie  $E$  und des halben Streuwinkels  $\frac{\vartheta}{2}$ . (10 P.)

[K8] • Die Energien der gebundenen Zustände des Wasserstoffatoms sind von der Form  $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Hierbei ist  $E_I = \frac{1}{2}\alpha^2 \mu c^2 = \frac{1}{2} \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} m_e c^2 = \frac{1}{2} \frac{e^4 m_e}{c^2}$ , wobei wir die Näherung gemacht haben, daß die reduzierte Masse  $\mu$  des Elektrons (Zweikörperproblem!) aufgrund des sehr viel schwereren Protons ungefähr gleich der Masse  $m_e$  eines freien Elektrons ist. Die Energie  $E_n$  ist entartet, da  $n = N + \ell + 1$  mit  $N, \ell \in \mathbb{Z}_+$  sich aus zwei Quantenzahlen zusammensetzt. Dieselbe Energie läßt sich also mit den Drehimpuls-Eigenzuständen mit  $\ell = 0, 1, \dots, n-1$  erreichen. Zusätzlich hat man noch die  $(2\ell + 1)$ -fache Entartung der Energie bezüglich der magnetischen Quantenzahl  $m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ . Also ist die gesamte Entartung der Energie  $E_n$  gegeben durch  $\# = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + n = 2 \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 - n + n = n^2$ . Im Kontinuum ist jede Energie  $E > 0$  möglich. Diese ist allein durch den Impuls bestimmt, und daher mit dem gesamten Raumwinkel  $4\pi$  des Impulses unendlich entartet, d.h.  $E = \frac{p^2}{2m}$  hängt nur vom Betrag des Impulses ab. (5 P.)

• Da es sich um ein Zweikörperproblem handelt, hat man zunächst einmal je 6 Orts- und Impulsoperatoren, je 3 pro Teilchen. Allerdings kann man die Bewegung des Schwerpunktes abseparieren, was je 3 effektive Orts- und Impulsoperatoren übrigläßt. Der Phasenraum der Relativbewegung ist also 6-dimensional.

[Unter Ausnutzung von Erhaltungsgrößen wie Energie  $E$  und Drehimpuls  $\vec{L}$  läßt sich die Behandlung des Problems natürlich auf 2 effektive Variablen reduzieren. Wer ganz raffiniert ist, kann nun noch das quantenmechanische Äquivalent des Runge-Lenz-Vektors verwenden, um noch zwei Variablen zu eliminieren. Die tatsächliche Symmetriegruppe der relativen Variablen des Wasserstoffatoms (Schwerpunktbewegung schon abgespalten) ist nämlich die 6-dimensionale Gruppe  $SO(4)$ . Daher läßt sich das Wasserstoffproblem in der Tat völlig algebraisch lösen.]