**[K1]** Ein Operator sei definiert als $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + \mathrm{i}\frac{P}{p_0}\right)$ mit $x_0, p_0$ reell. Welche Relation müssen $x_0$ und $p_0$ erfüllen, damit $[a, a^+] = 1$ gilt? Es sei nun $a^+ a \propto H$ für einen Hamiltonoperator. Berechnen Sie die normierte Wellenfunktion $\Psi_0(x)$ des Grundzustandes, sowie das Schwankungsquadrat $(\Delta X)^2$. Hinweise: $\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, $\int \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{-x^2} = -\,\partial_b \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-bx^2}\Big|_{b=1}$ bzw. $X$ durch $a, a^+$ ausdrücken. (15 P.)

**[K2]** Drei Operatoren $L_i$ erfüllen die Drehimpuls-Algebra $[L_i, L_j] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$. Welche Eigenwerte hat der Operator $(\vec{L} \times \vec{L}) \cdot \vec{L} = \varepsilon_{ijk} L_i L_j L_k$ ? (5 P.)

**[K3]** Die Pauli-Matrizen sind definiert als $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Finden Sie die Eigenwerte der Matrix $n^i\sigma_i$ für $(n^1, n^2, n^3) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Zeigen Sie, daß $\chi = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta/2)\exp(-\mathrm{i}\phi/2) \\ \sin(\theta/2)\exp(+\mathrm{i}\phi/2) \end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor zu $n^i\sigma_i$ ist. (10 P.)

**[K4]** Ein Teilchen laufe aus der Richtung $x = -\infty$ mit $E > V_0$ ein. Das Potential ist $V(x) = \begin{cases} 0 & : \ x < 0 \\ V_0 & : \ x > 0 \end{cases}$ mit $V_0 > 0$. Sinnvolle Abkürzungen: $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\kappa = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Berechnen Sie die Wellenfunktionen, sodann den durchlaufenden und reflektierten Strom als Funktion des einlaufenden Stromes. Welche Summenregel gilt? (10 P.)

**[K5]** Ein quantenmechanisches System besitze genau zwei Energie-Eigenzustände $|\Lambda_1\rangle$ und $|\Lambda_2\rangle$ mit den unterschiedlichen Energien $E_1 = \hbar\omega_1$ bzw. $E_2 = \hbar\omega_2$. Wie sieht ein beliebiger Zustand $|\Psi(t)\rangle$ zur Zeit $t = 0$ in der Energie-Basis aus, und wie entwickelt er sich im Laufe der Zeit? Eine beliebige Observable $A$ habe einen Eigenzustand $|\phi\rangle = \phi_1|\Lambda_1\rangle + \phi_2|\Lambda_2\rangle$ zum Eigenwert $\alpha$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $w(t)$ dafür an, bei Messung des Zustandes $|\Psi(t)\rangle$ den zu $\phi$ gehörigen Meßwert zu erhalten. Können Sie hieraus die einzelnen Energien $E_1$ und $E_2$ bestimmen? (10 P.)

**[K6]** Ein Elektron (Spin 1/2) befinde sich in einem Zustand mit Bahndrehimpuls $\ell = 1$. Zeigen Sie, daß der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ einen Satz von Drehimpulsoperatoren bildet (die Komponenten von $\vec{J}$ also eine Drehimpulsalgebra erfüllen), und berechnen Sie die sechs Zustände $|j = \frac{3}{2}, m_j\rangle$ und $|j = \frac{1}{2}, m_j\rangle$ als Linearkombinationen der Produktzustände $|\ell = 1, m_\ell, s = \frac{1}{2}, m_s\rangle$. Hinweis: Verwenden Sie Auf- und Absteige-Operatoren. Es gilt dann $J_\pm|j, m_j\rangle = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j \pm 1)}\,|j, m_j \pm 1\rangle$ etc. (15 P.)

**[K7]** Der differentielles Wirkungsquerschnitt für ein radialsymmetrisches Potential $V(r)$ ist in Bornscher Näherung

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{m^2}{\hbar^4}\frac{1}{q^2}\left|\int_0^\infty \mathrm{d}r\, rV(r)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}rq} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}rq}\right)\right|^2 .$$

Berechnen Sie ihn für das Yukawa-Potential $V(r) = \frac{\kappa}{r}\mathrm{e}^{-r/r_0}$. Zeigen Sie, daß das Betragsquadrat $q^2$ des Impulsübertrages $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ mit dem Streuwinkel $\vartheta$ über $q^2 = 8\frac{Em}{\hbar^2}\sin^2(\frac{\vartheta}{2})$ zusammenhängt, wobei $\vec{k}_i$ und $\vec{k}_f$ die Impulse beim Einlaufen und Auslaufen des Teilchens sind. Geben Sie damit ihr Ergebnis als Funktion von $E$ und $\frac{\vartheta}{2}$ an. (10 P.)

**[K8]** Geben Sie für das quantenmechanische System bestehend aus Proton und Elektron, auch unter dem Namen Wasserstoffatom bekannt, das Energiespektrum an und beschreiben Sie die Entartung der diskreten und kontinuierlichen Energien. Wieviele linear unabhängige Orts- und Impulsoperatoren wirken auf den Zuständen dieses quantenmechanischen Systems? (5 P.)