Übungsblatt XI — Quantenmechanik I — Prof. Norbert Dragon

Präsenzübungen — 19. und 20. Juni 2001

[P1] In der Vorlesung wurden bei der Herleitung von Fermi's *goldener Regel* zwei wichtige mathematische Identitäten verwendet.

(1) Zeigen Sie, daß

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x+\mathrm{i}\varepsilon}=\mathrm{PV}\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x)$$

ist. Hierbei bezeichnet $\mathrm{PV}f$ den *Hauptwert* (engl. *principal value*) der Funktion f. Dieser ist wie folgt definiert: Für eine beliebige Testfunktion t ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,(\mathrm{PV}f)(x)t(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\mathrm{d}x\,f(x)t(x)\,.$$

(2) Zeigen Sie, daß für das Differenzieren der Exponentialfunktion nach einem Parameter die folgende Integraldarstellung gilt:

$$\partial_\lambda \mathrm{e}^{A(\lambda)}=\int_0^1\mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{zA(\lambda)}(\partial_\lambda A(\lambda))\mathrm{e}^{(1-z)A(\lambda)}\,.$$

[P2] *Streuung an einem radialsymmetrischen Potential*: Betrachten Sie eine ebene Welle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$, die an einem radialsymmetrischen Potential $V(r)$ gestreut wird. Sei

$$\psi(\vec r)=\sum_{\ell\geq 0}\frac{y_\ell(r)}{r}P_\ell(\cos\theta)$$

eine Lösung der Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(r)-E\right)\psi(\vec r)=0$$

mit $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ und der Asymptotik

$$\psi(\vec r)\ \sim\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+f(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\,,\qquad r\to\infty\,.$$

Vergegenwärtigen Sie sich folgenden Punkt der Vorlesung: Entwickeln Sie die Funktion $f(\theta)=\sum_{\ell\geq 0}f_\ell P_\ell(\cos\theta)$ und nutzen Sie die Asymptotik

$$y_\ell(r)\ \sim\ c_\ell\sin(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell)\,,\qquad r\to\infty\,,$$

um c_ℓ und f_ℓ durch δ_ℓ auszudrücken.

[P3] Betrachten Sie jetzt $V(r)=\frac{\alpha}{r^2}$ und finden Sie δ_ℓ explizit. Bemerkenswerter Weise ist δ_ℓ unabhängig von der Energie. Welche Symmetrie ist hierfür verantwortlich?

[H1] *Partialwellen und Resonanzen*: Für ein radialsymmetrisches Potential $V(r)$, das für $r > a$ verschwindet, läßt sich die Lösung der Schrödingergleichung für $r > a$ in der Form

$$\psi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\ell \geq 0} \mathrm{i}^\ell (2\ell+1) A_\ell(r) P_\ell(\cos\theta)$$

schreiben, wobei die Radial-Wellenfunktion für $r > a$ gegeben ist durch

$$A_\ell(r) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\ell} \left[\cos\delta_\ell j_\ell(kr) - \sin\delta_\ell n_\ell(kr)\right] .$$

Man bezeichnet $j_\ell(z) = (-z)^\ell \left(\frac{1}{z}\partial_z\right)^\ell \frac{\sin z}{z}$ als *sphärische Bessel-Funktionen*, und $n_\ell(z) = -(-z)^\ell \left(\frac{1}{z}\partial_z\right)^\ell \frac{\cos z}{z}$ als *sphärische Neumann-Funktionen*. Betrachten Sie das Problem der Streuung an einer unendlich harten Kugel vom Radius a.

(1) Leiten Sie aus der Bedingung $A_\ell(a) = 0$ eine einfache Formel für $\tan\delta_\ell$ ab.

(2) Wie lautet der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} in den Grenzfällen niedriger Energien ($ka \ll 1$) bzw. hoher Energien ($ka \gg 1$)? Hinweis: Mit dem optischen Theorem gilt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell \geq 0} (2\ell+1) \sin^2\delta_\ell .$$

Nutzen Sie das asymptotische Verhalten der j_ℓ und n_ℓ aus, um für $ka \ll 1$ zu zeigen, daß die Summe durch den $\ell = 0$ Beitrag dominiert wird. Brechen Sie für $ka \gg 1$ die Summe bei $\ell_{\max} \approx ka$ ab. Das asymptotische Verhalten ist mit $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$:

$$\begin{array}{rclcrcl} & & \lim_{z\to 0}: & \quad & & & \lim_{z\to\infty}: \\ j_\ell(z) & \sim & \frac{z^\ell}{(2\ell+1)!!}\,, & & j_\ell(z) & \sim & \frac{1}{z}\cos\left(z - (\ell+1)\frac{\pi}{2}\right)\,, \\ n_\ell(z) & \sim & -\frac{(2\ell-1)!!}{z^{\ell+1}}\,, & & n_\ell(z) & \sim & \frac{1}{z}\sin\left(z - (\ell+1)\frac{\pi}{2}\right)\,. \end{array}$$

(4 P.)

[H2] Betrachten Sie, mit den Bezeichnungen aus der obigen Aufgabe, das Potential einer idealisierten Kugelschale

$$V(r) = \lambda \frac{\hbar^2}{2m} \delta(r-a) .$$

(1) Verwenden Sie die Anschlußbedingungen bei $r = a$, um eine Gleichung für $\tan\delta_\ell$ herzuleiten, die die Streuphasen festlegt. Setzen Sie für $r < a$ dabei $A_\ell(r) = c_\ell j_\ell(kr)$ an und begründen Sie, warum die $n_\ell(kr)$ für $r < a$ nicht auftreten. Zeigen Sie, daß der Limes $\lambda \to \infty$ auf den Ausdruck für die Streuung an einer unendlich harten Kugel führt.

(2) Beschränken Sie die weiteren Untersuchungen auf s-Wellen-Streuung im Limes kleiner Energien, $\lambda a \gg ka$. Die Energie der Streuteilchen ist $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Zeigen Sie, daß in diesem Grenzfall für bestimmte Energien Resonanz auftritt. In diesem Grenzfall ist $|\tan ka| \ll 1$, und Resonanz tritt ein, wenn $\cot\delta_0$ verschwindet.

(3) Entwickeln Sie die Streuphase $f_0 = (k\cot\delta_0 - \mathrm{i}k)^{-1}$ um die Resonanzenergie E_{res} und drücken Sie das Ergebnis aus durch die Resonanzbreite

$$\Gamma = -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\cot\delta_0\Big|_{E=E_{\text{res}}}} .$$

(4) Geben Sie den Wirkungsquerschnitt $\sigma_0 = 4\pi|f_0|^2$ an und zeigen Sie, daß die Resonanz im Limes $\lambda \to \infty$ sehr scharf wird. (6 P.)