[P1] *Der eindimensionale harmonische Oszillator*. Es soll die algebraische Lösung dieses wichtigen Beispiels erarbeitet werden. Für eine Raumdimension lautet die Schrödingergleichung des Oszillatorproblems

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2\right)\psi(t,x)\,. \tag{$*$}$$

Es werden Operatoren a^+ und a wie folgt definiert:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + \mathrm{i}\frac{P}{p_0}\right)\,, \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} - \mathrm{i}\frac{P}{p_0}\right)\,.$$

(1) Bestimmen Sie p_0 so, daß für den Kommutator gilt:

$$[a, a^+] = \mathbb{1}\,.$$

(2) Bestimmen Sie x_0 so, daß der Hamiltonoperator in Gleichung ($*$) bis auf eine Grundzustandsenergie geschrieben werden kann als

$$H = const\, a^+ a\,.$$

Wie lautet die Konstante?

(3) Bestimmen Sie die normierte Lösung $\phi_0(x)$ der Gleichung

$$a|\phi_0\rangle = 0\,.$$

(4) Zeigen Sie, daß gilt:

$$[H, a^+] = \hbar\omega a^+\,.$$

(5) Berechnen Sie mit der Produktregel die folgenden Kommutatoren:

$$[a, (a^+)^n]\,, \qquad [a^m, (a^+)^n]\,,$$

und bestimmen Sie damit $\langle\phi_0|[a^m, (a^+)^n]|\phi_0\rangle$.

(6) Zeigen Sie

$$H(a^+)^n|\phi_0\rangle = \lambda_n (a^+)^n|\phi_0\rangle\,.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_n und die Normierung der Zustände $|\phi_n\rangle = const(a^+)^n|\phi_0\rangle$.

(7) Für $z \in \mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{e}^{-(z-y)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}H_k(y)\,\mathrm{e}^{-y^2}\,,$$

wobei die $H_k(y)$ die sogenannten *Hermite-Polynome* sind. Zeigen Sie

$$H_k(y) = (-1)^k \mathrm{e}^{y^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}\mathrm{e}^{-y^2}\,.$$

(8) Setzen Sie schließlich $y = \frac{x}{x_0}$ und zeigen Sie

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}x_0}\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}}H_n(\frac{x}{x_0})\,.$$

[H1] Betrachten Sie nochmals den eindimensionalen Tunneleffekt (siehe Hausaufgabe II.2). Wieder laufe das Teilchen von $x = -\infty$ ein, nun jedoch mit einer Energie $E > V_0$, so daß es klassisch den Kasten überwindet, statt reflektiert zu werden.

(1) Ersetzen Sie κ geeignet, so daß das Gleichungssystem in (3) von Hausaufgabe II.2 gültig bleibt. Zeigen Sie dann mit diesem System sowie den Identitäten $\cosh \mathrm{i}x = \cos x$, $\sinh \mathrm{i}x = \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$, daß

$$|T(E)|^2 = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + V_0^2 \sin^2 \frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}} \,.$$

(2) Skizzieren und diskutieren Sie $|T(E)|^2$ als Funktion von $\frac{E-V_0}{E_0}$ mit $E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$. (4 P.)

[H2] Noch mehr Tunnelei: *Tunneleffekt für ein kontinuierliches Potential.* Es sei $E < V_0$ und die Notationen wie in Hausaufgabe II.2.

(1) Zeigen Sie für eine breite und hohe Potentialbarriere, d.h. für $\kappa a \gg 1$, daß näherungsweise

$$|T(E)|^2 \approx \exp(-\tfrac{4a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)})$$

gilt. Hinweise: Nutzen Sie $\sinh x \approx \frac{e^x}{2}$ für $x \gg 1$, und vernachlässigen Sie $\ln x$ gegenüber $\sqrt{x}$ für $x \gg 0$.

(2) Betrachten Sie einen kontinuierlichen Potentialberg $V(x)$ mit $V(x) = 0$ für $|x| > a$. Zerlegen Sie das Potential in N Kästen der jeweils gleichen Breite $\Delta x = \frac{2a}{N}$. Verwenden Sie die Näherung aus (1) und berechnen Sie für das System von N Kästen die Transmission $|T(E)|^2$. Zeigen Sie so, daß

$$|T(E)|^2 \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{-a}^{+a} \mathrm{d}x \sqrt{2m(V(x)-E)}\right)$$

gilt. (4 P.)

[H3] *Zur Unschärferelation.* Betrachten Sie die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, |\alpha X \psi(x) + \mathrm{i} P \psi(x)|^2 \geq 0 \,.$$

In der Vorlesung wurde vorgeführt, daß daraus die Relation

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \,.$$

folgt. Zur Erinnerung: $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$.

(1) Prüfen Sie nach, daß die Schwankung ΔX unabhängig vom Mittelwert $\langle X \rangle$ ist, d.h. sich nicht ändert, wenn X durch $X + \mathit{const}$ ersetzt wird.

(2) Gehen Sie von der Herleitung in der Vorlesung aus und stellen Sie die Differentialgleichung auf, die $\psi(x)$ erfüllen muß, damit $\langle X \rangle = x_0$, $\langle P \rangle = p_0$ und das Unschärfeprodukt $\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}$ wird. Finden Sie die Lösungen dieser Bedingungen. (2 P.)