Übungsblatt VII Quantenmechanik I Prof. Norbert Dragon
Präsenzübungen 15. und 16. Mai 2001

[P1] *Kopplung von Drehimpulsen*: Ein Elektron befinde sich in einem Zustand mit Bahndrehimpuls $\ell = 1$. Berechnen Sie die *Clebsch-Gordon*-Koeffizienten $\langle \ell, m_\ell, s, m_s | j, m\rangle$ für die Kopplung des Bahndrehimpulses an den Spin des Elektrons. Hinweis: Verwenden Sie die Auf- und Absteige-Operatoren $J_+ = L_+ + S_+$ und $J_- = L_- + S_-$. Machen Sie sich klar, daß damit – sofern L und S miteinander kommutieren – offensichtlich gilt:

$$\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|J, m \pm 1\rangle =$$
$$\sqrt{\ell(\ell+1) - m_\ell(m_\ell \pm 1)}|\ell, m_\ell \pm 1, s, m_s\rangle + \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}|\ell, m_\ell, s, m_s \pm 1\rangle\,.$$

Weiterer Hinweis: Für den Zustand $|\ell, m_\ell, s, m_s\rangle$ werden oft auch die Notationen $|\ell, m_\ell\rangle|s, m_s\rangle$ und $|\ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ verwendet.

[P2] Es seien a^+ und a ein Paar von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die den bekannten Beziehungen $[a, a^+] = 1$, $[a, a] = [a^+, a^+] = 0$ genügen. Zeigen Sie, daß damit die Operatoren

$$\begin{aligned} L_z &= \hbar(\ell - a^+ a)\,, \\ L_+ &= \hbar\sqrt{2\ell - a^+ a}\, a\,, \\ L_- &= \hbar\, a^+ \sqrt{2\ell - a^+ a} \end{aligned}$$

die Drehimpulsalgebra erfüllen. Prüfen Sie außerdem nach, daß die Beziehung

$$(\vec{L})^2 = \hbar^2 \ell(\ell + 1)$$

erfüllt ist. Wann ist diese Darstellung der Drehimpulsalgebra gültig?

Anmerkung: Diese Darstellung der Drehimpulsoperatoren geht auf T. Holstein und H. Primakoff zurück, zu finden in Phys. Rev. **58** (1940) 1098. Sie eignet sich besonders zur Untersuchung des semiklassischen Grenzfalles $(\vec{L})^2 \gg \hbar^2$.

[H1] Schon wieder der *harmonische Oszillator*: Erinnern Sie sich an die algebraische Behandlung des harmonischen Oszillators mit einem Paar von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+ und a mit Vertauschungsrelationen $[a, a^+] = 1$, $[a^+, a^+] = [a, a] = 0$.
(1) Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ den Zustand

$$|\psi_\alpha\rangle = C\, \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}((a^+)^2 - a^2 + 1)} |\phi_0\rangle\,,$$

wobei $|\psi_\alpha\rangle$ durch C normiert wird. Drücken Sie den Exponenten durch X und P aus.
(2) Gehen Sie in die Ortsraum-Darstellung, so daß Sie $P = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$ setzen können. Zeigen Sie $(\mathrm{e}^{\alpha x \partial_x} f)(x) = f(\mathrm{e}^\alpha x)$ durch Ableiten nach α. Wie läßt sich damit die Wellenfunktion $\psi_\alpha(x)$ durch die von $\phi_0(x')$ ausdrücken? Hinweis: Gefragt ist hier nach der Beziehung $x' = x'(x)$. Begründen Sie mit Ihrem Ergebnis, warum ein solcher Zustand $|\psi_\alpha\rangle$ auch *gequetschter Zustand* (engl. *squeezed state*) genannt wird.
(3) Man bezeichnet für $z \in \mathbb{C}$ den Operator

$$S(z) = \mathrm{e}^{z(a^+)^2 - z^* a^2}$$

als *Quetsch-Operator* (engl. *squeeze operator*). Zeigen Sie, daß $S(z)$ unitär ist. Welchen Wert (bis auf eine Phase) hat also die Normierungskonstante C im ersten Aufgabenteil? (4 P.)

[H2] Und noch mehr *harmonischer Oszillator*: Betrachten Sie sogenannte *Bogoliubov*-Transformationen. Dies sind lineare Transformationen der Erzeuger- und Vernichter-Operatoren:

$$A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cosh\alpha + a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sinh\alpha\,, \qquad A^+ = a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\cosh\alpha + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sinh\alpha\,.$$

(1) Zeigen Sie, daß die Operatoren A, A^+ die Vertauschungsrelation $[A, A^+] = 1$ erfüllen.
(2) Drücken Sie den Hamiltonoperator $H_A = \hbar\omega A^+ A$ durch X und P aus.

Betrachten Sie den Grundzustand von H_A, d.h. einen Zustand $|\Lambda_0\rangle$ mit $A|\Lambda_0\rangle = 0$. Zeigen Sie, daß der Grundzustand von H_A von angeregten Zuständen von $H = \hbar\omega a^+ a$ erfüllt ist, d.h. $\langle\Lambda_0|\phi_k\rangle \neq 0$ für alle k. Dieser Effekt wird auch *Unruh*-Effekt genannt. Gehen Sie wie folgt vor, um die Behauptung zu beweisen:
(3) Verwenden Sie den Quetsch-Operator $S(z) = \mathrm{e}^{-B}$ mit $B = z^* a^2 - z(a^+)^2$. Schreiben Sie z in Polarkoordinaten als $z = \frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}$. Verwenden Sie die Relationen $[a, (a^+)^m] = m(a^+)^{m-1}$ und $[a^+, a^m] = -m a^{m-1}$, und zeigen Sie damit

$$[B, a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}] = \alpha\, a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\,, \qquad [B, a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}] = \alpha\, a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,.$$

(4) Zeigen Sie mit Hilfe der Operator-Identität

$$\mathrm{e}^B X \mathrm{e}^{-B} = X + [B, X] + \frac{1}{2!}[B, [B, X]] + \ldots + \frac{1}{n!}\underbrace{[B, [B, \ldots [B,}_{n-\text{mal}} X] \ldots]] + \ldots\,,$$

daß dann für den Quetsch-Operator gilt:

$$\begin{aligned} S^+(z)\, a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\, S(z) &= a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \alpha\, a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \frac{\alpha^2}{2!}\, a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \frac{\alpha^3}{3!}\, a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \ldots \\ &= a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cosh\alpha + a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sinh\alpha\,, \\ S^+(z)\, a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\, S(z) &= a^+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\cosh\alpha + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sinh\alpha\,. \end{aligned}$$

(5) Dieses Resultat stellt also einen Zusammenhang zwischen dem Grundzustand von H_A und dem gequetschten Zustand des ursprünglichen Hamiltonoperators H her (was die Behauptung impliziert). Geben Sie an, was die physikalische Bedeutung der Bogoliubov-Transformation ist, was also den Unruh-Effekt ausmacht? (6 P.)