

- [P1] *Grundzustand des Wasserstoffatoms*: Ein Elektron befinde sich in einem Zustand, der durch

$$\langle \vec{r} | \psi \rangle = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|\vec{r}|}{a_0}}$$

mit dem *Bohrschen Radius* $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \cdot 10^{-10}$ m beschrieben wird (Grundzustand des Wasserstoffatoms).

- (1) Überzeugen Sie sich, daß die Wellenfunktion richtig normiert ist.
- (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron im Innern einer Kugel mit Radius a_0 ?
- (3) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Hamiltonoperators H und des Drehimpulses \vec{L} . Überprüfen Sie die Gültigkeit des Virialsatzes $-\langle V \rangle = 2\langle T \rangle$.

- [P2] *Bindungszustände im Zentralpotential*: Bestimmen Sie die Bindungsenergien für ein Potential der Form

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}$$

mit $\alpha, \beta > 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

- (1) Bringen Sie die Schrödingergleichung auf eine Form, die analog zu der des Wasserstoffproblems ist. Verwenden Sie dabei die Beziehung

$$s(s+1) = \ell(\ell+1) + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}.$$

- (2) Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte $E_{n\ell}$ mit Hilfe Ihrer Kenntnisse über das Wasserstoffproblem aus der Vorlesung. Geben Sie auch den Entartungsgrad der Energieniveaus an.

Hinweis zu [H1]: In Teilaufgabe (7) wird der Begriff der Parität verwendet. Der Paritätsoperator Π ist definiert über $(\Pi\psi)(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$, führt also eine Punktspiegelung am Ursprung aus. Um die Behauptung in (7) zu beweisen, gehen Sie wie folgt vor:

- Zeigen Sie, daß H' invariant unter der Parität ist, d.h. $[\Pi, H']\psi = 0 \forall \psi$.
- Zeigen Sie, daß die Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms,

$$\psi_{n\ell m}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | n\ell m \rangle = u_n(r) Y_{\ell m}(\varphi, \vartheta) = u_n(r) e^{im\varphi} P_{\ell m}(\cos \vartheta),$$

Eigenzustände von Π mit Parität $(-1)^\ell$ sind. Machen Sie sich ferner klar, daß auch $[\Pi, H_0] = [\Pi, (\vec{L})^2] = [\Pi, L_z] = 0$ sind.

- Zeigen Sie, daß Π unitär ist. Folgern Sie damit, daß für die Matrixelemente gelten muß: $\langle n\ell m | H' | n'\ell'm' \rangle = \pi_{n\ell m} \pi_{n'\ell'm'} \langle n\ell m | H' | n'\ell'm' \rangle$. Hierbei sind $\pi_{n\ell m}$ die Paritätseigenwerte, d.h. $\Pi | n\ell m \rangle = \pi_{n\ell m} | n\ell m \rangle$. Welche Auswahlregel ergibt sich damit für ℓ und ℓ' ?
- Zeigen Sie, daß H' dreihinvariant um die z -Achse ist, d.h. $[L_z, H'] = 0$. Welche Auswahlregel ergibt sich damit für m und m' ?

[H1] *Zeemaneffekt*, der Einfachheit halber ohne Spin: Der Hamiltonoperator für ein Teilchen (Ladung $-e$, Masse m) in einem elektromagnetischen Feld, gegeben durch ein Vektorpotential \vec{A} und ein skalares Potential Φ über

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

lautet

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{X}, t) \right)^2 - e\Phi(\vec{X}, t).$$

Ein Wasserstoffatom sei einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld \vec{B} ausgesetzt.

- (1) Zeigen Sie, daß ein Vektorpotential für dieses \vec{B} gegeben ist durch $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{X}$.
- (2) Zeigen Sie, daß \vec{A} der Coulombgleichung $\text{div } \vec{A} = 0$ genügt. Warum ist $\vec{A} \cdot \vec{P} = \vec{P} \cdot \vec{A}$?
- (3) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator geschrieben werden kann als

$$H = \underbrace{\frac{(\vec{P})^2}{2m} - \frac{e^2}{r}}_{H_0} + \frac{e}{2mc} \vec{B} \cdot \vec{L} + \underbrace{\frac{e^2}{2mc^2} (\vec{A})^2}_{H'}.$$

(4) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege \vec{B} in z -Richtung, d.h. $\vec{B} = B e_z$. Zeigen Sie, daß die Eigenfunktionen $\psi_{n\ell m}$ von H_0 die (aus der Vorlesung bekannten) Eigenfunktionen des freien Wasserstoffproblems sind, aber die Energien wie folgt verschoben sind:

$$E_{n\ell m} = -\frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{(N + \ell + 1)^2} + \hbar \frac{eB}{2mc} m \equiv -\frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2} + \hbar \omega_L m.$$

Hierbei sind $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ der *Bohrsche Radius* und ω_L die *Lamorfrequenz*. Diese Verschiebung hat H.A. Lorentz 1895 klassisch hergeleitet. Aus heutiger Sicht ist es erstaunlich, daß sein Ergebnis stimmt.

- (5) Bei starkem B wird H' relevant. Vergleichen Sie den in B linearen und quadratischen Term von H und schätzen Sie für $r \approx a_0$ ab, wann beide Terme gleich groß werden.
- (6) Zeigen Sie, daß gilt:

$$H' = \frac{e^2 B^2}{8mc^2} r^2 \sin^2 \vartheta = \frac{\hbar^2 \omega_L^2 a_0}{2e^2} \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \sin^2 \vartheta.$$

Welche ℓ -Anteile enthält H' ? Drücken Sie $\sin^2 \vartheta$ durch Kugelflächenfunktionen aus.

(7) Die Energiekorrekturen in erster Ordnung Störungstheorie bestimmt man bei Energieentartung als Eigenwerte der Matrix

$$E_{\alpha\beta}^{(1)} = \langle \alpha | H' | \beta \rangle, \quad \text{wobei } E_\alpha = E_\beta \text{ ist.}$$

Hierbei wurde $|\alpha\rangle = |n\ell m\rangle$ als Abkürzung verwendet. Um den Einfluß von H' zu berücksichtigen, müssen Sie also Matrixelemente der Störung berechnen. Zeigen Sie, daß die Matrixelemente von H' nur zwischen Zuständen gleicher Parität und gleicher m -Quantenzahl nicht verschwinden (siehe Rückseite!).

- (8) Welche der Matrixelemente $\langle n\ell m | H' | n'\ell' m' \rangle$ für $n = n' = 3$ können verschieden von Null sein?
- (9) Berechnen Sie die niedrigste Energiekorrektur zu $|100\rangle$. (10 P.)