Name: ______________________, Matrikel-Nr.: ______________________

*** Unbedingt ausfüllen und mit abgeben!!! ***

■ 1 *Eichtransformationen.* Ein elektromagnetisches Feld besitzt das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ und das elektrische Potential Φ. Ein Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich in diesem Feld. Der Hamiltonoperator lautet in diesem Fall

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2 + q\Phi\,.$$

(1) Wie würde H lauten, wenn das Teilchen Spin $\frac{1}{2}$ hätte? 2:10

(2) Für ein zeitlich konstantes und homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)^t$ kann man

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{x}$$

annehmen. Ebenso gut ist die Wahl $\boldsymbol{A}' = (-Bx_2, 0, 0)^t$. Warum? 2:10

(3) Zeigen Sie, wie die Wellenfunktionen der Schrödingergleichung mit $\boldsymbol{A}'$ umtransformiert werden müssen, damit sie in die Wellenfunktionen zu $\boldsymbol{A}$ übergehen. 6:10

■ 2 *Spin-Bahn Kopplung.* In einem Atom wird die Kopplung zwischen dem Spin $\boldsymbol{S}$ eines Elektrons und dem Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ durch den Operator $H_{LS} = \xi \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ beschrieben.

(1) Welche Werte kann der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$ annehmen? 1:10

(2) Welche Eigenwerte hat H_{LS} ? 3:10

(3) Geben Sie für den Fall $\ell = 1$ die normierten Eigenzustände von H_{LS} an. 6:10

[Hinweis: $J_-|j, m_j; L, S\rangle = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j - 1)}|j, m_j - 1; L, S\rangle$. Beachten Sie, dass $J_- = L_- + S_-$ ist, so dass Sie die Zustände in der Orthonormalbasis $|\ell, m\rangle|S, m_S\rangle$ angeben können.]

■ 3 Es seien $a^\dagger$ und a ein Paar von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit Standardkommutator $[a, a^\dagger] = 1$.

(1) Zeigen Sie, dass dann die Operatoren

$$L_z = \hbar(\ell - a^\dagger a)\,, \quad L_+ = \hbar\sqrt{2\ell - a^\dagger a}\, a\,, \quad L_- = a^\dagger \hbar \sqrt{2\ell - a^\dagger a}$$

die Drehimpulsalgebra erfüllen, d.h. $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$ und $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$. 7:10

(2) Prüfen Sie nach, dass die Beziehung $\boldsymbol{L}^2 = \hbar^2\ell(\ell + 1)$ erfüllt ist. 3:10

■ 4 Der Hamiltonoperator des anharmonischen Oszillators sei durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha\frac{m^2\omega^2}{\hbar}x^4$$

gegeben, wobei $\alpha > 0$ sei.

(1) Welche Energiekorrekturen ergeben sich in erster Ordnung Störungstheorie zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$? 10

[Hinweis: $a = \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}}\, x + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\, p\,, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}}\, x - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\, p\,.$]

■ 5 *Kommutatoren und Heisenbergbild.* Ein stark vereinfachtes Modell für Elektronen auf einer Kette ist der Hubbard-Hamiltonoperator

$$H = -t \sum_{i,\alpha=\uparrow,\downarrow} \left(c^\dagger_{i+1,\alpha} c_{i,\alpha} + c^\dagger_{i,\alpha} c_{i+1,\alpha} \right) + U \sum_i c^\dagger_{i,\uparrow} c_{i,\uparrow} c^\dagger_{i,\downarrow} c_{i,\downarrow} \,,$$

wobei die fermionischen Erzeuger und Vernichter die Antikommutatoren $\{c_{i,\alpha}, c^\dagger_{j,\beta}\} = \delta_{i,j}\delta_{\alpha,\beta}$ besitzen.

(1) Berechnen Sie den Kommutator von $c^\dagger_{j,\beta}$ mit H. | 6:10 |

(2) Geben Sie nun den Kommutator von $c_{j,\beta}$ mit H an, ohne lange zu rechnen. | 1:10 |

(3) Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Heisenbergbild? | 3:10 |

■ 6 *Zweite Quantisierung.* Geben Sie in zweiter Quantisierung für nicht-relativistische Teilchen die Operatoren für die folgenden Observablen an:

(1) die Teilchendichte $\rho(x)$ und deren Fouriertransformierte $\hat\rho(q) = \sum_x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\rho(x)$, | 4:10 |

(2) die Teilchenstromdichte $\boldsymbol{j}(x)$ und deren Fouriertransformierte $\hat{\boldsymbol{j}}(q) = \sum_x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\boldsymbol{j}(x)$, | 4:10 |

(3) sowie die kinetische Energie E. | 2:10 |

■ 7 Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator der Ladung q befinde sich zur Zeit $t_a = -\infty$ in seinem Grundzustand. Zu diesem Zeitpunkt wird ein homogenes zeitabhängiges elektrisches Feld

$$V_t = -qF\mathrm{e}^{-\alpha t^2} x$$

eingeschaltet.

(1) Berechnen Sie für $t \to +\infty$ in der ersten Ordnung Störungstheorie die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{|0\rangle\to|n\rangle}$ für $n > 0$. | 10 |

■ 8 *Relativistische Quantenmechanik.* Ein freies Teilchen mit festem Impuls in z-Richtung, d.h. $\boldsymbol{p} = (0,0,p_z)^t$, genügt der Dirac Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = H_{\text{Dirac}}\psi(\boldsymbol{r},t)\,, \quad H_{\text{Dirac}} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta\,,$$

mit $\beta = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}$ und $\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Machen Sie den Ansatz $\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}Et/\hbar)$, $\psi(\boldsymbol{r}) = \exp(\mathrm{i}p_z z/\hbar)u$, um ein vierdimensionales homogenes Gleichungssystem bei festem Impuls in z-Richtung zu erhalten. | 4:10 |

(2) Für welche Werte von E existieren nicht-triviale Lösungen? | 3:10 |

(3) Wie sehen also die 4-Spinoren u aus? | 3:10 |
[Hinweis: Sie brauchen die Lösungen nicht zu normieren.]

□ GESAMT: $\Sigma =$ | 80 |

*

VIEL ERFOLG!

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
								Zeichen