· ◇ · PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

■ 11.1 Prüfen Sie, ob die Dirac Wirkung, gegeben durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi\,,$$

invariant unter der *chiralen* Transformation $\psi \mapsto \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma^5}\psi$ ist.

■ 11.2 Es sei j^μ ein Noether-Strom. Ein zweiter Noether-Strom werde definiert als $\tilde{j}^\mu = j^\mu + \partial_\nu K^{\nu\mu}$ mit einem antisymmetrischen K, d.h. $K^{\nu\mu} = -K^{\mu\nu}$. Wie unterscheiden sich die zugehörigen Erhaltungsgrößen?

■ 11.3 Es sei die klassische Maxwell-Theorie betrachtet. Ohne Quellen hat das elektromagnetische Feld die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\nu\mu}$.

(i) Leiten Sie $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$ her.

(ii) Welche Energiedichte ergibt sich damit?

(iii) Wie transformiert sich der zugehörige Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu A_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho}\,,$$

unter einer Eichtransformation?

(iv) Wie läßt er sich auf eine Form bringen, die eichinvariant und symmetrisch in den Indizes (d.h. $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) ist? (Hinweis: Denken Sie an das Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe 11.2.)

(v) Drücken Sie nun noch die Komponenten $T^{0\nu}$ des *modifizierten* Energie-Impuls-Tensors durch die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus.

NOETHER-Theorem: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)$ eine Lagrangedichte. Sei eine durch λ parametrisierte Schar von Transformationen Λ gegeben: $\phi_i \mapsto \Lambda_\lambda\phi_i$. In vielen Fällen hat Λ die explizite infinitesimale Darstellung $\phi_i(x) \mapsto \phi_i(x) - \mathrm{i}\lambda M_{ij}\phi_j(x)$ für kleine λ, d.h. Λ ist repräsentiert durch eine Matrix mit konstanten Koeffizienten. Ist $\mathcal{L}$ invariant unter dieser Transformation, so existiert ein erhaltener Strom der Form

$$j^\mu = -\sum_i \xi_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,, \qquad \xi_i = \left.\frac{\partial(\Lambda_\lambda\phi_i)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}\,.$$

Diese Form des Noether-Theorems ist für die Bearbeitung dieser Übungen ausreichend, da angenommen sei, dass $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Metrik $g^{\mu\nu}$ (hier $= \eta^{\mu\nu}$) abhängt, und die Transformation die Metrik invariant läßt. Zum Beispiel ist in Hausübung 11.2 mit diesen Bezeichnungen $\xi_\phi = \mathrm{i}q\phi$ und $\xi_{\phi^*} = -\mathrm{i}q\phi^*$.

· ◇ · HAUSÜBUNGEN · ◇ ·

■ 11.1 $1+0$ *dimensionale Feldtheorie*. Ein freies Bose-Feld $\phi(t)$ hat die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \,.$$

Quantisieren Sie diese Feldtheorie, indem Sie wie folgt vorgehen:

(i) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, bestimmen Sie die Impulsdichte Π und damit die Hamiltondichte $\mathcal{H}$. 1 P.

(ii) Entwickeln Sie ϕ und Π nach den Lösungen der wechselwirkungsfreien Feldgleichungen. 1 P.

(iii) Wie lautet die Kommutator-Forderung? Was ergibt sich damit für den Feldoperator? Wie lautet schließlich der Hamiltonoperator? 2 P.

Nun soll der sogenannte *Propagator* berechnet werden. Dem Propagator in der Quantenfeldtheorie entspricht die Greensche Funktion in der klassischen Feldtheorie. Er ist ein Maß für die Korrelation der Werte eines Feldes in Abhängigkeit des Raum-Zeit-Abstandes der Messpunkte. Aufgrund der Quantisierung müssen die Messpunkte nun zeitlich geordnet sein:

$$G_2(t) \equiv \langle 0|\mathcal{T}\phi(t)\phi(0)|0\rangle = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Delta(\omega)$$

mit zu bestimmender Funktion $\Delta(\omega)$. Da es keine Wechselwirkung gibt, ist das folgende Resultat übrigens (ausnahmsweise) exakt.

(iv) Bestimmen Sie $\Delta(\omega)$. Die für die Zeitordnung $\mathcal{T}$ erforderliche Aufteilung der t-Achse führen Sie am besten mit Stufenfuntkionen $\Theta(\pm t)$ durch. Diese darf man dann durch “schönere” Funtionen ersetzen, $\Theta(\pm t) \mapsto \Theta(\pm t)\mathrm{e}^{\mp\varepsilon t}$, da $G_2(t)$ üblicherweise nur mit geeigneten Testfunktionen unter einem t-Integral auftritt, die hinreichend schnell auf Null abfallen. Skizzieren Sie die Pole von $\Delta(\omega)$ in der komplexen ω-Ebene. 3 P.

■ 11.2 Mehr *skalare Elektrodynamik*. In Hausübung 10.3 wurde die Wirkung der skalaren Elektrodynamik für ein komplexes Feld $\phi \in \mathbb{C}$ bereits vorgestellt,

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,, \quad D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}qA_\mu\,, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,.$$

(i) Wie lautet der Noether-Strom zu der Symmetrie $\phi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\lambda}\phi$? 1 P.

(ii) Wie lautet der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$, also der zu Translationen gehörende Noether-Strom? 1 P.

(iii) Begründen Sie, warum man zum Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ einen Term der Form $\partial_\rho K^{\rho\mu\nu}$ mit in den ersten beiden Indizes antisymmetrischem K, $K^{\rho\mu\nu} = -K^{\mu\rho\nu}$, addieren darf. Bringen Sie durch eine geeignete Wahl von K den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ auf eine Form, die eichinvariant und symmetrisch (d.h. $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) ist. 1 P.

(iv) Prüfen Sie explizit nach, dass die Ströme aus (i) und (iii) tatsächlich erhalten sind. (Hinweis: Nutzen Sie die Bewegungsgleichungen aus.) 2 P.

12 P.