· ◇ · PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

Die folgenden Aufgaben sind klausurähnliche Aufgaben.

■ 1 *Kopplung von Spins* $\frac{1}{2}$. Betrachten Sie ein Atom mit N Elektronen, die jeweils den Spin $\frac{1}{2}$ besitzen.

(1) Warum sind die Komponenten des Gesamtspinoperators $S_k = \sum_{i=1}^{N} S_k^{(i)}$, wobei $S_k^{(i)}$ die k-te Komponente des Spinoperators des i-ten Elektrons ist, invariant unter Permutationen des Spins? 2:20

(2) Geben Sie den Zustand $|\chi\rangle$ mit den größten Eigenwerten S und m_S für den Gesamtspin $\boldsymbol{S}$ bzw. dessen z-Komponente S_z an. 2:20

(3) Es sei $S_\pm = \sum_{i=1}^{N} S_\pm^{(i)}$, wobei $S_\pm^{(i)} = S_1^{(i)} \pm \mathrm{i} S_2^{(i)}$. Zeigen Sie, dass $S_+|\chi\rangle = 0$, und dass $(S_-)^n|\chi\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ symmetrisch unter Vertauschung von Spins ist. 4:20

(4) Begründen Sie, warum die Zustände mit maximalem Gesamtspin alle symmetrisch unter Vertauschung von Spins sind. 5:20

Betrachten Sie nun den Spezialfall der Kopplung dreier Spins, d.h. $N = 3$.

(5) Welche Gesamtspins können außer dem maximalen noch vorkommen? Wieviele Zustände gibt es insgesamt? 3:20

(6) Finden Sie zwei linear unabhängige Zustände $|\chi_k\rangle$, $k = 1, 2$, mit $S_+|\chi_k\rangle = 0$ und $S_z|\chi_k\rangle = \frac{\hbar}{2}|\chi_k\rangle$. 4:20

■ 2 Die Entwicklung eines eindimensionalen Potentials um sein Minimum hat die Form

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + c_1 \lambda x^3 + c_2 \lambda^2 x^4 + \mathcal{O}(\lambda^3)\,.$$

(1) Stellen Sie dieses Potential durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a dar. Formen Sie die Produkte von Operatoren so um, dass die Vernichter a sämtlich rechts von den Erzeugern $a^\dagger$ stehen. 5:10

[Hinweis: $a = \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}}\, x + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\, p\,, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}}\, x - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\, p\,.$]

(2) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie mit Hilfe der Störungstheorie bis zur Ordnung λ^2 einschließlich. 5:10

■ 3 Gegeben sei die Dirac Gleichung in der Form

$$\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{i}e}{\hbar} A_\mu \right) \Psi - m\Psi = 0$$

mit den γ-Matrizen in der Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Zeigen Sie, dass die Dirac Gleichung eichinvariant ist. 4:10

(2) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0\,, \quad j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\,, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0\,,$$

ab. Was folgt daraus für die Wahrscheinlichkeitsdichte j^0 ? 6:10

■ 4 Ein System, welches nur die beiden Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ mit den Energie $\hbar\omega_1 < \hbar\omega_2$ besitzt, befindet sich im Zustand $|1\rangle$. Nach dem Einschalten einer zeitlich konstanten hermiteschen Störung W zur Zeit $t = 0$ kann das System in einen aus $|1\rangle$ und $|2\rangle$ gemischten Zustand übergehen. Es geht um die Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Wahrscheinlichkeit, dass sich das System zur Zeit t im Zustand $|i\rangle$, $i = 1, 2$, befindet in Abhängigkeit von $W_{ij} = \langle i|W|j\rangle$.

(1) Gehen Sie von dem Ansatz

$$\psi(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}|2\rangle$$

aus und stellen Sie ein Differentialgleichungssystem für $c_1(t)$ und $c_2(t)$ auf, das durch

$$c_1(t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,, \quad c_2(t) = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}\,, \quad \omega_0 = \omega_1 - \omega_2$$

gelöst werden kann. 5:10

(2) Welche Lösungen gibt es für ω ? 3:10

(3) Wie lautet nun die Lösung, die auch die Anfangsbedingungen respektiert? 2:10

□ GESAMT: $\Sigma =$ 50:50

Zur weiteren Vorbereitung seien folgende Stichpunkte genannt:

- Eichtransformationen;
- Zeitunabhängige Störungsrechnung;
- Drehimpuls, Spin, Gesamtdrehimpuls, Rechnen mit Auf- und Absteige- Operatoren;
- Harmonischer Oszillator, Erzeuger und Vernichter;
- Fermionische (antikommutierende) Erzeuger und Vernichter;
- Zweite Quantisierung;
- Relativistische Quantenmechanik: Klein-Gordon Gleichung, Dirac Gleichung;
- Relativistische Quantenmechanik: Lösung für freies Teilchen;
- Zeitabhängige Störungsrechnung, Wechselwirkungsbild.