

- 2.1 *Grundzustand des Heliumatoms.* Bestimmen Sie den Grundzustand eines $(Z - 2)$ -fach ionisierten Atoms. Nehmen Sie den Kern als unendlich schwer an und berücksichtigen Sie die Wechselwirkung der beiden Elektronen untereinander in erster Ordnung (zeitunabhängiger) Störungsrechnung:
- (i) Wie lautet der ungestörte Hamilton-Operator H_0 ?
 - (ii) Wie ist der Grundzustand des ungestörten Hamilton-Operators H_0 gegeben?
 - (iii) Wie groß ist demnach die Grundzustandsenergie in Einheiten E_H der Bindungsenergie des Grundzustandes des Wasserstoffatoms?
 - (iv) Wie ist die zugehörige Eigenfunktion gegeben?
 - (v) Wie lautet schließlich die Korrektur der Energie in erster Ordnung Störungstheorie?
 - (vi) Wie hängt Ihrer Meinung nach die Güte der Näherung von Z ab?

■ 2.1 *Zeeman-Effekt.* Es sei ein Wasserstoffatom im homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)^t$ betrachtet. Das Bohr-Magneton ist $\mu_B = q\hbar/2m$, der Spin wird vernachlässigt. Die Energie des ungestörten Grundzustandes sei wieder mit $-E_H$ bezeichnet.

- (i) Wie lautet der Hamilton-Operator ($\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$)? Zerlegen Sie ihn in einen ungestörten Anteil H_0 sowie den paramagnetischen und diamagnetischen Anteil H_1 bzw. H_2 . Sie erhalten die Beiträge H_k , $k \in \{0, 1, 2\}$, des Hamilton-Operators als die Anteile proportional zu \mathbf{B}^k . Nutzen Sie die spezielle Form von \mathbf{B} aus, um den Anteil H_2 zu vereinfachen. (Hinweis: Es ist zweckmäßig, den Projektionsoperator \mathbf{R}_\perp von \mathbf{R} senkrecht zu \mathbf{B} einzuführen.) 2 P.
- (ii) Interpretieren Sie die neuen Anteile H_1 und H_2 mit Hilfe des magnetischen Momentes $\mathbf{M} = \frac{q}{2m}(\mathbf{L} - q\mathbf{r} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$. Warum ist nicht einfach $\mathbf{M} = \frac{q}{2m}\mathbf{L}$? 1 P.
- (iii) Schätzen Sie ganz grob die Größenordnungen der Energiedifferenzen $\Delta E_k/h$ der Hamilton-Operatoren H_k , $k \in \{0, 1, 2\}$, in Einheiten von $2\pi\hbar = h$ ab, d.h. in Frequenzen. Beweisen Sie damit, dass die Energiedifferenzen bei Übergängen von H_0 dominiert werden, und dass die Korrekturen von H_2 im allgemeinen klein gegenüber denen von H_1 sind. (Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Matrixelemente von \mathbf{R}_\perp^2 von der Größenordnung a_0^2 sind.) 2 P.
- (iv) Betrachten Sie die Resonanzlinie für einen Übergang vom Grundzustand $1s$ in den ersten angeregten Zustand $2p$. Vernachlässigen Sie den diamagnetischen Anteil des Hamilton-Operators (warum ist dies ohne allzu großen Fehler möglich?). Zeigen Sie, dass die Eigenzustände zu H_0 auch Eigenzustände zu $H_0 + H_1$ sind. Wie ändert sich aber die Energie der Eigenzustände? 1 P.
- (v) Offenbar treten die Quantenzahlen $l \in \{0, 1\}$ und $m \in \{-1, 0, 1\}$ auf. Berechnen Sie die notwendigen Matrixelemente des Dipoloperators $\mathbf{D} = q\mathbf{R}$. Überlegen Sie, bevor Sie losrechnen, warum Matrixelemente $\langle n, l, m | \mathbf{D} | n, l, m' \rangle$ verschwinden. (Hinweis: Drücken Sie die kartesischen Koordinaten x, y, z durch Kugelflächenfunktionen aus, so dass Sie deren Orthogonalitätseigenschaften ausnutzen können. Das verbleibende Radialintegral brauchen Sie nicht auszurechnen, setzen Sie es einfach gleich χ .) 3 P.
- (vi) Nehmen Sie an, dass das Atom sich zur Zeit $t_0 = 0$ in einer Überlagerung des $1s$ Zustandes mit einem der $2p$ Zustände befindet. Wie sieht der Zustand dann zur Zeit $t > t_0$ aus? (Hinweis: der auftretende Faktor $\exp(iE_H t/\hbar)$ ist eine globale Phase ohne physikalische Bedeutung und kann daher weggelassen werden.) Berechnen Sie den Erwartungswert des Dipolmomentes für diesen Zustand für die möglichen Werte von m (warum verschwindet der Erwartungswert von \mathbf{D} für stationäre Zustände?). 2 P.
- (vii) Diskutieren Sie für die drei möglichen Fälle von m Frequenz und Polarisation der bei den jeweiligen Übergängen emittierten Strahlung. 1 P.

12 P.