· ◇ · PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

■ 5.1 Zum *Wechselwirkungsbild*. Betrachten Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$(H_0 + V_t)|\psi_t\rangle = i\hbar\partial_t|\psi_t\rangle \,, \quad t > t_0 \,,$$

mit der Randbedingung $|\psi_t\rangle = |\psi_{t,0}\rangle$ für $t \leq t_0$. V_t werde nun als Störung angesehen, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ eingeschaltet wird. Zeigen Sie, dass sich die Lösung der obigen Gleichung formal schreiben läßt als

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V(t')\mathrm{d}t'\right)|\psi(t_0)\rangle \,.$$

Hierbei sind $|\psi_t\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}H_0 t)|\psi(t)\rangle$ und $V(t) = \exp(\frac{i}{\hbar}H_0 t)V_t \exp(-\frac{i}{\hbar}H_0 t)$. Das Symbol $\mathcal{T}\cdot$ bezeichnet das zeitgeordnete Produkt.
Bemerkung: Für die auftretenden Zeitentwicklungsoperatoren ist auch die folgende Notation gebräuchlich: $U_0(t,t_0) = \exp(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0))$, so dass $V(t) = U_0^\dagger(t,0)V_t U_0(t,0)$ ist. Die vollständige Zeitentwicklung ist dann gegeben durch $|\psi_t\rangle = U_0(t,t_0)U_I(t,t_0)|\psi_{t,0}\rangle$, wobei $U_I(t,t_0) = \mathcal{T}\exp(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} U_0^\dagger(t',0)V_t U_0(t',0)\mathrm{d}t')$ die Zeitentwicklung für Zustände im Wechselwirkungsbild beschreibt.

· ◇ · HAUSÜBUNGEN · ◇ ·

■ 5.1 *Bloch-Wellen.* In der Vorlesung wurde das Problem von Teilchen in einem periodischen Potential behandelt, das für die Festkörperphysik sehr wichtig ist. Betrachten Sie dazu das ein-dimensionale Beispiel eines Teilchens mit Masse m in dem periodischen Potential

$$V(x) = \lambda \frac{\hbar^2}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)\,.$$

Für die Eigenzustände $\psi_k(x)$ zum Eigenwert $E_k = \frac{\hbar^2}{2m} q_k^2$ macht man den Bloch-Wellen Ansatz

$$\psi_k(x) = \exp(ikx)\, u_k(x)\,,$$

wobei die Funktion $u_k(x)$ die Periodizität des Gitters besitzt, $u_k(x + a) = u_k(x)$. Bemerkung für Neugierige: Dieser Ansatz folgt aus dem Floquet-Theorem.

(i) Begründen Sie den Ansatz

$$\psi_k^{(n)}(x) = A_n \exp(iq_k x) + B_n \exp(-iq_k x)$$

im Intervall $na < x < (n + 1)a$. Geben Sie die Bedingungen an, denen die Koeffizienten A_n und B_n genügen müssen. **3 P.**

(ii) Leiten Sie aus den Anschlußbedingungen an den Punkten $x = na$ die Bestimmungsgleichung für den Parameter q_k her:

$$\cos(aq_k) + \frac{a\lambda}{aq_k} \sin(aq_k) = \cos(ak)\,.$$ **3 P.**

■ 5.2 Betrachten Sie die Wechselwirkung $V_t = -q_0 E(t) x$ eines geladenen harmonischen Oszillators im homogenen elektrischen Feld $E(t)$ als zeitabhängige Störung. Die Wahrscheinlichkeit $P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_n\rangle}$ des Übergangs vom Grundzustand zum Zeitpunkt $t = 0$ in einen Eigenzustand $|\psi_n\rangle \neq |\psi_0\rangle$ zur Zeit t ist gegeben durch $P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_n\rangle}(t) = |\langle \psi_n | U(t, 0) | \psi_0 \rangle|^2$ mit dem Entwicklungsoperator $U(t, t_0) = U_0(t, t_0) U_I(t, t_0)$ und den Bezeichungen der Präsenszübung 5.1.

(i) Begründen Sie, dass in niedrigster nichttrivialer Näherung der Entwicklungsoperator für die Zustände im Wechselwirkungsbild gegeben ist durch

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} V(t')\mathrm{d}t' = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} U_0(t', 0)^\dagger V_t U_0(t', 0)\mathrm{d}t'\,.$$ **1 P.**

(ii) Berechnen Sie $P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_n\rangle}(t = \infty)$ in niedrigster nichttrivialer Näherung. **2 P.**

(iii) Was ergibt sich demnach für $P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_0\rangle}(t = \infty)$? **1 P.**

(iv) Geben Sie $P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_0\rangle}(t = \infty)$ explizit für $E(t) = E_0 \exp(-t/T)$ an. Was ergibt sich im Grenzfall $T \gg 1$? **2 P.**

Hinweis: Beachten Sie, da es sich bei dem System um einen harmonischen Oszillator handelt, dass $x \sim (a + a^\dagger)$ gilt.

12 P.