· ◇ · PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

■ 6.1 *Fermis "Goldene Regel"*. Ein System befinde sich vor dem Einschalten einer Störung im Eigenzustand $|\psi_0\rangle$ von H_0. Die Störung sei gegeben durch ein Potential

$$V_t = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V(x) & t \geq 0\,. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie in erster Ordnung die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_n\rangle} = |\langle \psi_n | \psi_t \rangle|^2$$

dafür, dass sich das System nach der Zeit t im Eigenzustand $|\psi_n\rangle$ befindet.

(ii) Führen Sie das verbleibende Integral aus und beachten Sie dabei, dass V_t nach dem Einschalten nicht weiter von t abhängt. Diskutieren Sie mit Hilfe der untenstehenden Skizze das Verhalten von $P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_n\rangle}(t)$ in Abhängigkeit von t.

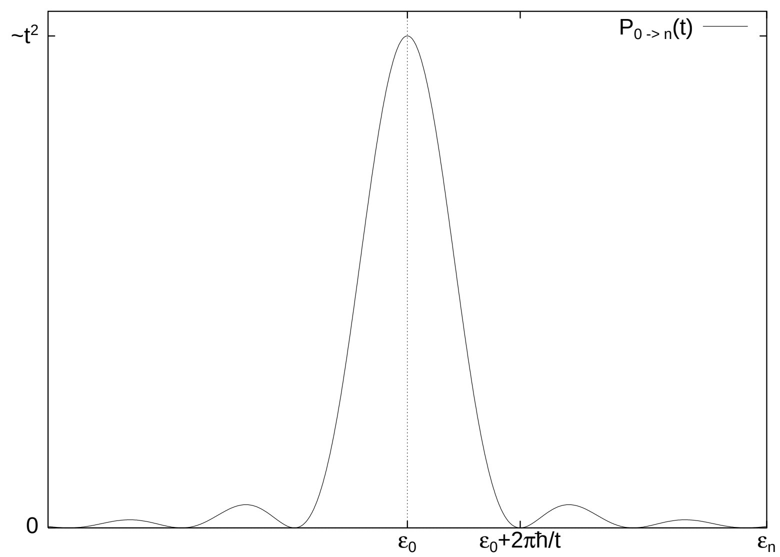
(iii) Nehmen Sie nun an, dass der Zustand $|\psi_n\rangle$ zu einem Kontinuum von (oder zu einer Gruppe von sehr eng benachbarten) Energie-Eigenzuständen gehört, wie z.B. die Zustände eines freien Teilchens. Dieses Ensemble sei durch eine Dichtefunktion $\rho(\epsilon_n)$ charakterisiert. Weiter sei $|\langle \psi_n | V | \psi_0 \rangle|^2$ nur sehr schwach von der Wahl eines Elementes aus diesem Ensemble von Zuständen abhängig. Leiten Sie die totale Übergangs-Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von $|\psi_0\rangle$ in irgendeinen der Zustände des Ensembles für hinreichend lange Zeiten t (so dass der zentrale Peak völlig innerhalb des Ensembles liegt) ab:

$$\sum_{|\psi_n\rangle \in \text{Ensemble}} P_{|\psi_0\rangle \to |\psi_n\rangle} = \Gamma t\,, \quad \Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\, |\langle \psi_n | V | \psi_0 \rangle|^2 \, \rho(\epsilon_n) \Big|_{\epsilon_n = \epsilon_0}\,. \qquad (*)$$

(iv) Alternativ kann die Übergangsrate Γ auch als Distribution angegeben werden. Zeigen Sie, dass formal für $t \to \infty$ aus der in (ii) erhaltenen Funktion der Ausdruck

$$\Gamma_{|\psi_0\rangle \to |\psi_n\rangle} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_n | V | \psi_0 \rangle|^2 \, \delta(\epsilon_n - \epsilon_0)$$

abgeleitet werden kann. Begründen Sie, warum die *Goldene Regel* $(*)$ tatsächlich nur für Zeiten $\frac{2\pi\hbar}{\Delta\epsilon} < t \ll \frac{2\pi\hbar}{\delta\epsilon}$ gültig ist, wobei $\delta\epsilon$ den Abstand der Niveaus im Ensemble, und $\Delta\epsilon$ die Breite des Ensembles bezeichnet.



· ◇ · HAUSÜBUNGEN · ◇ ·

■ 6.1 Es sei ein System gegeben, das durch den Hamiltonoperator H_0 beschrieben wird mit bekannten Eigenzuständen $|n\rangle$ und Eigenwerten E_n. Das System wird einer äußeren zeitabhängigen Störung $V(t) = \hat{h}\exp(i\omega t) + \hat{h}^\dagger \exp(-i\omega t)$ unterworfen.

(i) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P_{n\to m}(t) &= \left|\langle m|e^{-iH_0 t}U_I(t,0)|n\rangle\right|^2 , \\ U_I(t,0) &= \mathcal{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' V_I(t')\right) , \\ V_I(t) &= e^{iH_0 t}V(t)e^{-iH_0 t} , \end{aligned}$$

für beliebige Zustände in führender Ordnung in der Stärke des Potentials. 2 P.

(ii) Welche Arten von Prozessen werden durch die einzelnen Terme beschrieben? 1 P.

(Hinweise: Bezeichnungen und Definition der niedrigsten nichttrivialen Ordnung siehe Aufgabenblatt V. Setzen Sie einfach $h_{mn} = \langle m|\hat{h}|n\rangle$ und $h^*_{nm} = \langle m|\hat{h}^\dagger|n\rangle$ für die Matrixelemente von $\hat{h}$ und $\hat{h}^\dagger$.)

■ 6.2 Es beschreibe $|\boldsymbol{k}\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle$ ein Photon mit der Energie $\hbar\omega(\boldsymbol{k})$ und entsprechend $|\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1}a^\dagger_{\boldsymbol{k}_2}|0\rangle$ zwei Photonen mit Energien $\hbar\omega(\boldsymbol{k}_1)$ und $\hbar\omega(\boldsymbol{k}_2)$, etc. Betrachten Sie den Operator

$$\boldsymbol{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\hbar\,\boldsymbol{k}\,a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} .$$

(i) In der Vorlesung wurden die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für ein endliches Volumen eingeführt. Sie genügen den Vertauschungsrelationen $[a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$. Begründen Sie, dass beim Übergang zu einem unendlichen Raumvolumen die Kommutatoren in $[a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$ übergehen. 1 P.

(ii) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\boldsymbol{P}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}]$ und $[\boldsymbol{P}, a_{\boldsymbol{k}'}]$. 2 P.

(iii) Was ergibt also die Anwendung von $\boldsymbol{P}$ auf die Zustände $|\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\ldots\rangle$? 1 P.

■ 6.3 *Phononen.* Ein eindimensionaler Kristall aus N Atomen besitzt in einem einfachen Modell, wo benachbarte Atome wie durch Federn gekoppelt miteinander wechselwirken (elastische Kette), den Hamiltonoperator $H = \sum_{i=1}^N(\frac{1}{2m}{p_i}^2 + \frac{cm}{2}(q_{i+1}-q_i)^2)$ mit $[q_r,p_s] = i\delta_{r,s}$ und Gitterkonstante a. (Hinweis: $\sum_k \exp(ika(s-r)) = N\delta_{r,s}$ und $\hbar = 1$.)

(i) Transformieren Sie H auf Phononen- bzw. Normal-Koordinaten mit Hilfe von: $q_r = N^{-1/2}\sum_k Q_k\exp(ikar)$ bzw. $Q_k = N^{-1/2}\sum_s q_s\exp(-ikas)$ und $p_r = N^{-1/2}\sum_k P_k\exp(-ikar)$ bzw. $P_k = N^{-1/2}\sum_s p_s\exp(ikas)$. (Für Interessierte: Leiten Sie die konjugierten Impulse P_k her, indem Sie $p_r = m\dot{q}_r$ verwenden.) 2 P.

(ii) Die q_r sind hermitesche Größen, $q_r = q_r^\dagger$. Was folgt daraus für die Q_k und P_k? 1/2 P.

(iii) Eine einfache Wahl sind periodische Randbedingungen $q_{r+N} = q_r$. Welche Werte sind bei dieser Wahl für die Quasiimpulse k erlaubt? Was ist sinnvollerweise $\max\{|k|\}$ (Stichwort erste Brillouin-Zone)? 1 P.

(iv) Berechnen Sie $[Q_k, P_{k'}]$. Sind demnach die P_k die kanonischen Impulse? 1/2 P.

(v) Setzen Sie nun $a^\dagger_k = (\omega_k m/2)^{1/2}Q_{-k} - i(2\omega_k m)^{-1/2}P_k$ und $a_k = (\omega_k m/2)^{1/2}Q_k + i(2\omega_k m)^{-1/2}P_{-k}$ um H als Summe harmonischer Oszillatoren zu schreiben, also $H = \sum_k \omega_k a^\dagger_k a_k$. Welche Dispersionsrelation ω_k als Funktion von k ergibt sich? 1 P.

12 P.