· ◇ · PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

■ 8.1 *Algebra der Fermionen-Operatoren*. Betrachten Sie ein Paar aus einem antikommutierenden fermionischen Erzeuger und Vernichter, $\{c^\dagger, c\} = 1$. Der Besetzungszahl-Operator ist $N = c^\dagger c$.

(i) Es sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand von N, $N|n\rangle = n|n\rangle$. Ist n reell?

(ii) Betrachten Sie $n = \langle n|N|n\rangle$. Zeigen Sie, dass $n \geq 0$ sein muss, indem Sie n durch Norm-Quadrate ausdrücken. Können Sie auf ähnliche Weise zeigen, dass n nach oben beschränkt ist?

(iii) Betrachten Sie nun $Nc^\dagger|n\rangle$ und $Nc|n\rangle$ und zeigen Sie, dass $c^\dagger|n\rangle = \alpha|n'\rangle$ und $c|n\rangle = \beta|n''\rangle$ ist. Bestimmen Sie α, β und n', n''.

(iv) Bestimmen Sie damit abschließend, welche Werte n annehmen kann.

Die Algebra der Fermionen-Operatoren ist also gerade so gemacht, dass das Pauli-Prinzip automatisch garantiert erfüllt ist!

■ 8.2 Zur *Dirac Gleichung*. In der Vorlesung wurden die Klein-Gordon und die Dirac Gleichung abgeleitet. Rekapitulieren Sie dies wie folgt:

(i) Leiten Sie aus der relativistischen Dispersionsrelation $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ für ein Teilchen der Masse m die Klein-Gordon Gleichung ab.

(ii) Wieso läßt die Klein-Gordon Gleichung Lösungen mit negativer Energie zu? Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte nicht positiv definit ist.

(iii) In der Klein-Gordon Gleichung tritt der Operator $\Box = g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu$ auf. Versuchen Sie mit Hilfe des dritten Binoms und des Ansatzes $\sqrt{\Box} = \gamma_\mu \partial^\mu$ die Klein-Gordon Gleichung zu linearisieren. Welche Relation erfüllen die γ_μ ?

(iv) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

die geforderte Relation erfüllen, wobei

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen (plus die Einheits-Matrix) sind.

· ◇ · HAUSÜBUNGEN · ◇ ·

■ 8.1 Eine Herleitung der *Fermi-Verteilung*. Im großkanonischen Ensemble seien nicht miteinander wechselwirkende Fermionen betrachtet mit den zugehörigen antikommutierenden Erzeugern und Vernichtern: $\{c_\lambda^\dagger, c_{\lambda'}\} = \delta_{\lambda,\lambda'}$. Der Besetzungszahl-Operator ist natürlich $\mathcal{N} = \sum_\lambda N_\lambda$ mit $N_\lambda = c_\lambda^\dagger c_\lambda$.

(i) Welche Form hat der Hamilton-Operator H in Besetzungszahl-Darstellung? 1 P.

(ii) Leiten Sie die Fermi-Verteilung her, indem Sie die Spur

$$n_\lambda = \frac{1}{\mathcal{Z}} \operatorname{Sp}\left(\mathrm{e}^{-\beta(H-\mu\mathcal{N})} N_\lambda\right)$$

betrachten und den Operator c_λ von ganz hinten einmal nach vorne durchtauschen. 3 P.

■ 8.2 *Pauli-Matrizen und Spin-Projektoren*. Es bezeichne $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^t$ und $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ beliebige Operatoren, die mit $\boldsymbol{\sigma}$ vertauschen.

(i) Zeigen Sie die Identität

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,.$$ 2 P.

(ii) Es werde ein Zweiteilchen-System betrachtet, $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = (\sigma_1 \otimes 1\!\!1, \sigma_2 \otimes 1\!\!1, \sigma_3 \otimes 1\!\!1)^t$ und $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = (1\!\!1 \otimes \sigma_1, 1\!\!1 \otimes \sigma_2, 1\!\!1 \otimes \sigma_3)^t$ bezeichnen die entsprechenden Spin-Operatoren. Zeigen Sie die Identität

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})^2 = 3 - 2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})$$

und damit, dass die Operatoren

$$\Pi_0 = \frac{1}{4}(1 - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})\,, \quad \Pi_1 = \frac{1}{4}(3 + \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})$$

zwei zueinander orthogonale Projektoren sind. Auf welche der Zweiteilchen-Spinzustände $|0,0\rangle$, $|1,-1\rangle$, $|1,0\rangle$ und $|1,1\rangle$ projizieren also die Operatoren Π_0 und Π_1 ? (Hinweis: Drücken Sie Π_0 und Π_1 durch $\boldsymbol{S}^2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)})^2$ aus.) 3 P.

(iii) Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\Pi_{\ell+1/2} = \frac{\ell + 1 + \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2\ell+1}\,, \quad \Pi_{\ell-1/2} = \frac{\ell - \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2\ell+1}$$

die analogen Projektoren für $j_1 = \ell$ und $j_2 = 1/2$ sind. (Hinweis: Gehen Sie analog zu (ii) vor, $\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma})^2$.) 3 P.

12 P.