· ◇ · keine PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

■ 9.0 Merken Sie sich bitte folgenden Termin vor: Die Raum-Zeit Koordinaten $x^\mu(E)$ für den Beginn des für den Scheinerwerb kausal relevanten Ereignisses

$$\text{lauten:}\qquad \begin{aligned} E &= \text{Klausur Quantenmechanik II} \\ x^0 &= \text{24. Juni 2000, 11:15 Uhr}, \\ \boldsymbol{x} &= \text{kleiner Physikhörsaal.} \end{aligned}$$

Zu Ihrer Information: Eine hinreichende Bedingung für den Erwerb eines Scheines ist durch die Wirkung

$$S[\text{Student}] = \text{Schein}\,\Theta(\ddot{U}(\text{Student}) - \frac{1}{2}\max(\ddot{U}))\,\Theta(K(\text{Student}) - \frac{1}{2}\max(K))$$

gegeben, wobei $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$ die Stufenfunktion ist, sowie $\ddot{U}$ die gesamte in den Hausübungen erreichte Punktzahl und K die in der Klausur erreichte Punktzahl darstellen.

· ◇ · HAUSÜBUNGEN · ◇ ·

■ 9.1 *Freies relativistisches Teilchen.* Die Dirac Gleichung für ein freies Teilchen lautet

$$\left(\mathrm{i}\hbar\,\partial_t + \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} - \beta mc^2\right)\Psi = 0$$

mit $\beta = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}$ und $\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$ wie in der Vorlesung gewählt.

(i) Lösen Sie die Dirac Gleichung zunächst für ein freies ruhendes Teilchen. 1 P.

(ii) Geben Sie, ausgehend von (i), mit Hilfe einer Lorentztransformation die Lösung der Dirac Gleichung für ein freies Teilchen mit beliebigem Impuls an. (Hinweis: Für eine Lorentztransformation in ein Bezugssystem mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{p}c^2/E_p$ mit $E_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4}$ hat man $\Psi'(\boldsymbol{r}', t') = \exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{w}/2)\Psi(\boldsymbol{r}', t')$. Beachten Sie: $E_p t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = mc^2 t$ im Ruhesystem, und $\tanh(w) = v/c$.) 2 P.

■ 9.2 Bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes nimmt die Dirac Gleichung die Form

$$\beta(\mathrm{i}\hbar\,\partial_t - H_{\mathrm{Dirac}})\Psi = 0\,, \quad H_{\mathrm{Dirac}} = c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}) + \beta mc^2 + e\phi\,,$$

an, wobei $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ wie in 9.1 gewählt seien.

(i) Zeigen Sie: Multipliziert man die Dirac Gleichung von links mit

$$P = \frac{\beta(\mathrm{i}\hbar\,\partial_t - H_{\mathrm{Dirac}}) + 2mc^2}{2mc^2}\,,$$

so erhält man die Klein-Gordon-ähnliche Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}(\mathrm{i}\hbar\,\partial_t - e\phi)^2 - (\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 - m^2c^2 + \frac{e\hbar}{c}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} - \mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\right)\Psi = 0\,, \quad (*)$$

wobei $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ das elektrische bzw. magnetische Feld beschreiben. 2 P.

(ii) Zeigen Sie weiter, ist Ψ eine Lösung von $(*)$, dann ist $P\,\Psi$ eine Lösung der Dirac Gleichung. (Umgekehrt ist jede Lösung Ψ der Dirac Gleichung auch eine Lösung von $(*)$, und $P\,\Psi = \Psi$ in diesem Fall, d.h. P ist ein Projektor.) 1 P.

■ 9.3 *Relativistisches Energie-Spektrum des Wasserstoffatoms.*

(i) Zeigen Sie, Gleichung $(*)$ in 9.2 geht für das stationäre (zeitunabhängige) Wasserstoff-Problem in die Gleichung

$$\left(\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} + \frac{2EZe^2}{rc^2} + \frac{\hbar^2}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r - \frac{\boldsymbol{L}^2 - (Ze^2/c)^2 - \mathrm{i}\hbar(Ze^2/c)\alpha_r}{r^2}\right)\Psi = 0$$

über, wobei $\alpha_r = \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{1}{r}\boldsymbol{r}$ gesetzt ist. 1 P.

(ii) Definieren Sie $K = \beta(1 + \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L})$ und zeigen Sie, dass K mit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ und H_{Dirac} kommutiert. (Hinweis: H_{Dirac} aus 9.2 mit $\boldsymbol{A} = 0$ und $\phi = -Ze/r$.) Bestimmen Sie die Eigenwerte k von K. (Hinweis: Zuerst Eigenwerte von K^2 bestimmen, dann $\{K, \gamma_5\}|k\rangle$ betrachten.) Was ist die physikalische Bedeutung von K ? 2 P.

(iii) Definieren Sie $\Lambda = -\beta K - \mathrm{i}\frac{Ze^2}{\hbar c}\alpha_r$ und zeigen Sie, dass $[\Lambda, K] = [\Lambda, \boldsymbol{J}] = 0$. Berechnen Sie Λ^2 und $\Lambda(\Lambda + 1)$. 1 P.

(iv) Wenn Sie jetzt ganz genau hinsehen, können Sie das relativistische Spektrum des Wasserstoffatoms durch Vergleich mit dem nicht-relativistischen Fall angeben. 2 P.

12 P.