K::1 $f(\mathbf{p}^2, \mathbf{q}^2, \mathbf{p}\cdot\mathbf{q})$ hängt nur von Skalaren ab, ist also rotationsinvariant. Bahndrehimpuls ist also null. Spinindices via $\epsilon_{\sigma\nu}$ sind antisymmetrisch, ergibt Zustand $|+-\rangle - |-+\rangle$, also Spin-Singulett. Also ist auch der Gesamtdrehimpuls null.

K::2 Die Wahrscheinlichkeit, den $|\uparrow\rangle$-Zustand in Richtung von $\mathbf{e}(\theta,\varphi)$ zu messen ist $w = \frac{1}{2} + c\cos\theta$, also unabhängig von φ. Hierbei ist $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ ein Maß für die Polarisation des Strahls.
Begründung: Die allgemeinste Dichtematrix eines 2-Zustandssystems hat die Form $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1} + a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, da ρ hermitesch sein muss. Der Koeffizient vor der Identität folgt aus $\mathrm{tr}\rho = 1$. In der Eigenbasis ergibt sich daher o.B.d.A.

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+c & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-c \end{pmatrix}, \qquad c \geq 0\,,$$

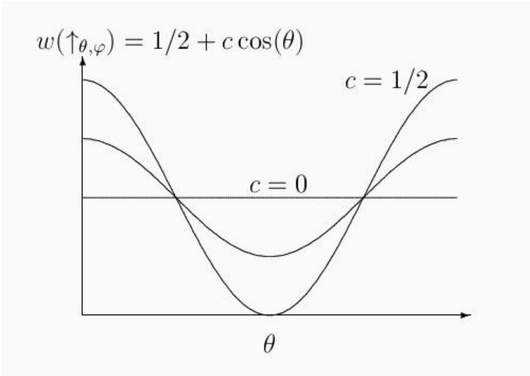
weil wir den ersten Eigenwert als den größeren Annehmen. Es ist nun

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}, \qquad \langle\Lambda|\Lambda\rangle = 1\,,$$

ein normierter Eigenzustand zum Meßwert $\frac{\hbar}{2}$ des Spin-$\frac{1}{2}$-Operators

$$S_{\theta,\varphi} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\theta\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z)\,,$$

der den Spinzustand in Richtung (θ,φ) misst. Offensichtlich ist $(\theta,\varphi) = (e_x, e_y, e_z)^t = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)^t$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w(\uparrow, \mathbf{e}(\theta,\varphi)) = \langle\Lambda|\rho\Lambda\rangle = \frac{1}{2} + c\cos\theta$.



K::3 Man nutze aus, das Vernichter das Vakuum annihilieren:

$$\begin{aligned}
&\langle \Gamma_{\mathbf{p}_1',\sigma_1',\mathbf{p}_2',\sigma_2'} \Gamma_{\mathbf{p}_1,\sigma_1,\mathbf{p}_2,\sigma_2}\rangle \\
=\ &\langle\Omega| a_{\sigma_2'}(\mathbf{p}_2') a_{\sigma_1'}(\mathbf{p}_1') a^\dagger_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1) a^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2)|\Omega\rangle \\
=\ &\langle\Omega| a_{\sigma_2'}(\mathbf{p}_2') \left\{a_{\sigma_1'}(\mathbf{p}_1'), a^\dagger_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1)\right\} a^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2)|\Omega\rangle - \langle\Omega| a_{\sigma_2'}(\mathbf{p}_2') a^\dagger_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1) a_{\sigma_1'}(\mathbf{p}_1') a^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2)|\Omega\rangle \\
=\ &\langle\Omega| \left\{a_{\sigma_2'}(\mathbf{p}_2'), a^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2)\right\}|\Omega\rangle\,(2\pi)^3 2\,p_1^0\,\delta_{\sigma_1'\sigma}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1) \\
&\quad - \langle\Omega| \left\{a_{\sigma_2'}(\mathbf{p}_2'), a^\dagger_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1)\right\} \left\{a_{\sigma_1'}(\mathbf{p}_1'), a^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2)\right\}|\Omega\rangle \\
=\ &(2\pi)^6\, 2p_1^0\, 2p_2^0 \left(\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_2) - \delta_{\sigma_1'\sigma_2}\delta_{\sigma_2'\sigma_1}\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2)\right)\,.
\end{aligned}$$

K::4 Man nutze die Viererimpulserhaltung für jede Komponente einzeln aus. Damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} E \\ \sqrt{E^2-m^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' \\ \sqrt{E'^2-m^2}\cos\theta \\ \sqrt{E'^2-m^2}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E-E'+m \\ \sqrt{E^2-m^2}-\sqrt{E'^2-m^2}\cos\theta \\ -\sqrt{E'^2-m^2}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Hierbei wurde weiter ausgenutzt, daß für alle diese Viererimpulse p gelten muss: $(p)^2 = m^2$. Man sollte sich noch klar machen, daß man o.B.d.A. jeweils den positiven Ast der Wurzeln nehmen kann. Die Bedingung dafür, daß auch das Rückstoßelektron auf der Masseschale liegt, lautet daher

$$m^2 = (E-E'+m)^2 - (\sqrt{E^2-m^2} - \sqrt{E'^2-m^2}\cos\theta)^2 - (\sqrt{E'^2-m^2}\sin\theta)^2 .$$

Wer will, kann dies auf die folgende Form bringen:

$$\sin^2\theta = \frac{2m(E-E')}{(E-m)(E'+m)} .$$

K::5 Mit $[J_3, a^\dagger_\sigma(0)] = \sigma\, a^\dagger_\sigma(0)$ und $J_3|\chi_\ni\rangle = \nu\,|\chi_\nu\rangle$ ergibt sich ohne große Mühe $J_3 a^\dagger_\sigma(0)|\chi_\nu\rangle = \big([J_3, a^\dagger_\sigma(0)] + a^\dagger_\sigma(0)J_3\big)\,|\chi_\nu\rangle = \big(\sigma a^\dagger_\sigma(0) + a^\dagger_\sigma(0)\nu\big)\,|\chi_\nu\rangle = (\sigma+\nu)a^\dagger_\sigma(0)|\chi_\nu\rangle$.

K::6 Mit der Definition $W(\Lambda, p) = L^{-1}_{\Lambda p}\,\Lambda\, L_p$ findet man $W(\Lambda_2\Lambda_1, p) = L^{-1}_{(\Lambda_2\Lambda_1)p}\,(\Lambda_1\Lambda_2)\,L_p = L^{-1}_{\Lambda_2(\Lambda_1 p)}\,\Lambda_2\,L^{-1}_{\Lambda_1 p}L_{\Lambda_1 p}\,\Lambda_1\,L_p = W(\Lambda_2, \Lambda_1 p)W(\Lambda_1, p)$.

K::7 $\mathrm{tr}(\gamma^k\gamma^l\gamma^m\gamma^n) = \mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^m\gamma^n\gamma^k$, da die Spur zyklisch ist. Damit ist dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^k\gamma^l\gamma^m\gamma^n) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\{\gamma^k, \gamma^l\gamma^m\gamma^n\}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(\gamma^k\gamma^l\gamma^m\gamma^n) - \mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^k\gamma^m\gamma^n) + \mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^k\gamma^m\gamma^n) - \mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^m\gamma^k\gamma^n) + \mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^m\gamma^k\gamma^n)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(\{\gamma^k,\gamma^l\}\gamma^m\gamma^n) - \mathrm{tr}(\gamma^l\{\gamma^k,\gamma^m\}\gamma^n) + \mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^m\{\gamma^k,\gamma^n\})\right] \\
&= \eta^{kl}\mathrm{tr}(\gamma^m\gamma^n) - \eta^{km}\mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^n) + \eta^{kn}\mathrm{tr}(\gamma^l\gamma^m) .
\end{aligned}$$

Nun ist $\mathrm{tr}(\gamma^a\gamma^b) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\{\gamma^a,\gamma^b\}) = \eta^{ab}\mathrm{tr}\mathbb{1} = 4\eta^{ab}$. Damit ergibt sich $\mathrm{tr}(\gamma^k\gamma^l\gamma^m\gamma^n) = 4[\eta^{kl}\eta^{mn} - \eta^{km}\eta^{ln} + \eta^{kn}\eta^{lm}]$. Da die Spur additiv ist, folgt sofort

$$\mathrm{tr}(\not k \not l \not m \not n) = 4k_k l_l m_m n_n[\eta^{kl}\eta^{mn} - \eta^{km}\eta^{ln} + \eta^{kn}\eta^{lm}] .$$

Es ist $\mathrm{tr}(\not k \not l \not m \not n \not o) = 0$, da die Spur über eine ungerade Anzahl von γ-Matrizen verschwindet.

K::8 Die sechs Zustände sind $|m_s, m_\ell\rangle \in \{|\pm\frac{1}{2}, 1\rangle, |\pm\frac{1}{2}, 0\rangle, |\pm\frac{1}{2}, -1\rangle\}$. Der Höchstgewichtszustand ist $|\frac{3}{2}\rangle_{3/2} = |\frac{1}{2}, 1\rangle$. Anwenden des Absteigers ergibt $J_-|\frac{3}{2}\rangle_{3/2} = (S_- + L_-)|\frac{1}{2}, 1\rangle$, also $\sqrt{3}|\frac{1}{2}\rangle_{3/2} = |-\frac{1}{2}, 1\rangle + \sqrt{2}|\frac{1}{2}, 0\rangle$. Für das Spin-$\frac{3}{2}$-Quadruplett ergibt sich

$$\begin{aligned}
|+\frac{3}{2}\rangle_{3/2} &= |+\frac{1}{2}, +1\rangle , \\
|+\frac{1}{2}\rangle_{3/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}|-\frac{1}{2}, +1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|+\frac{1}{2}, 0\rangle , \\
|-\frac{1}{2}\rangle_{3/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}|+\frac{1}{2}, -1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-\frac{1}{2}, 0\rangle , \\
|-\frac{3}{2}\rangle_{3/2} &= |-\frac{1}{2}, -1\rangle .
\end{aligned}$$

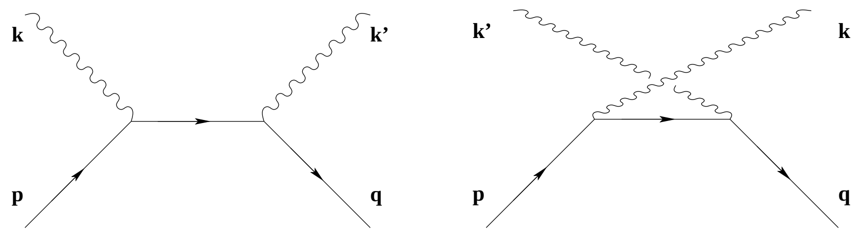
Der Höchstgewichtszustand des Spin-Dubletts, $|\frac{1}{2}\rangle_{1/2}$, muss auf dem Zustand $|\frac{1}{2}\rangle_{3/2}$ senkrecht stehen. Man findet damit

$$\begin{aligned}
|+\frac{1}{2}\rangle_{1/2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-\frac{1}{2},+1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|+\frac{1}{2},0\rangle\,,\\
|-\frac{1}{2}\rangle_{1/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}|-\frac{1}{2},0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|+\frac{1}{2},-1\rangle\,.
\end{aligned}$$

K::9 Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung erhält man

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k},\tau;\mathbf{k}',\tau'|S|\mathbf{p},\nu;\mathbf{q},\sigma\rangle\\
=\;&\langle\Omega|a_\tau(\mathbf{k})a_{\tau'}(\mathbf{k}')\frac{(\mathrm{ie})^2}{2}\int \mathrm{d}^4y\int \mathrm{d}^4x :\overline{\psi}\not{A}\psi(y)::\overline{\psi}\not{A}\psi(x): d^\dagger_\nu(\mathbf{p})b^\dagger_\sigma(\mathbf{q})|\Omega\rangle\\
=\;&-\frac{(\mathrm{ie})^2}{2}2\int \mathrm{d}^4y\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}py}\overline{v}_\nu(p)\gamma^n\langle T\psi(y)\overline{\psi}(x)\rangle\gamma^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}u_\sigma(q)\\
&\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\epsilon^*_{n,\tau}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\epsilon^*_{m,\tau'}(k') + (\tau k)\leftrightarrow(\tau'k')\right)\\
=\;&-\frac{(\mathrm{ie})^2}{2}2\int \mathrm{d}^4y\int \mathrm{d}^4x\int\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y(p-k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(q-k')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{p}(y-x)}\\
&\left(\overline{v}_\nu(p)\gamma^n\epsilon^*_{n,\tau}(k)\frac{\mathrm{i}(\hat{\not{p}}+m)}{\hat{p}^2-m^2}\gamma^m\epsilon^*_{m,\tau'}(k')u_\sigma(q) + (\tau k)\leftrightarrow(\tau'k')\right)\\
=\;&-\frac{(\mathrm{ie})^2}{2}2\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-k-k')\\
&\left(\overline{v}_\nu(p)\gamma^n\epsilon^*_{n,\tau}(k)\frac{\mathrm{i}(\not{q}-\not{k}'+m)}{(q-k')^2-m^2}\gamma^m\epsilon^*_{m,\tau'}(k')u_\sigma(q) + (\tau k)\leftrightarrow(\tau'k')\right)
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt ergibt sich ein Faktor zwei, weil es zwei Möglichkeiten gibt, den Erzeuger $b^\dagger_\sigma(\mathbf{q})$ durch einen Vernichter in einem ψ zu neutralisieren. Damit ist dann automatisch festgelegt, mit welchem $\bar{\psi}$ der Erzeuger $d^\dagger_\nu(\mathbf{p})$ neutralisiert wird. Die einzige mögliche Kontraktion ergibt dann den Fermion-Propagator. Das Vorzeichen rührt daher, daß wir insgesamt eine ungerade Anzahl von Fermionen vertauschen müssen, um die Erzeuger neutralisieren zu können. Der Term $\tau k) \leftrightarrow (\tau' k')$ deutet an, daß das Matrixelement in Wirklichkeit die Summe der beiden folgenden Graphen ist



DIe Integrationen verschwinden, da die x-Integration ein $(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-k'-\hat{p})$ liefert, die $\hat{p}$-Integration einfach $\hat{p}=q-k'$ setzt und die verbleibende y-Integration noch ein $(2\pi)^4\delta^{(4)}(\hat{p}+p-k)=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-k-k')$ übrigläßt. Das ϵ im Nenner des Propagators kann direkt vernachlässigt werden, da sich das propagierende Fermion nicht auf der Masseschale befindet, der Nenner also nie null wird.