P::1 *Norm von Vielteilchenzuständen*: Zeigen Sie für fermionische $d^\dagger_\nu$ durch vollständige Induktion

$$\langle d^\dagger_{\nu_1} \dots d^\dagger_{\nu_n} \Omega | d^\dagger_{\sigma_1} \dots d^\dagger_{\sigma_n} \Omega \rangle = \sum_\pi \mathrm{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} \tilde{\delta}_{\nu_i\, \sigma_{\pi(i)}} \ ,$$

indem Sie $\langle d^\dagger_{\nu_2} \dots d^\dagger_{\nu_n} \Omega | d_{\nu_1} d^\dagger_{\sigma_1} \dots d^\dagger_{\sigma_n} \Omega \rangle$ mit einem geeigneten gradierten Kommutator auswerten und die Induktionsannahme verwenden. Die Summe $\sum_\pi$ läuft über alle Permutationen π der natürlichen Zahlen bis n, $\mathrm{sign}(\pi)$ ist 1, wenn π gerade ist und -1, wenn es ungerade ist, $\tilde{\delta}_{\nu\sigma} = (2\pi)32p0\delta3(\vec{p} - \vec{q})$.

P::2 *Normalordnung und Zeitordnung*: Zeigen Sie den Keim des Wickschen Theorems

$$T(\phi(x)\phi(y)) = :\phi(x)\phi(y): + \langle \Omega | T(\phi(x)\phi(y)) \Omega \rangle \ .$$

H::1 *Gradierter Kommutator*:

[1] Es seien lineare Operatoren A bosonisch oder fermionisch und

$$|A| = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ bosonisch} \\ 1 & \text{falls } A \text{ fermionisch} \end{cases}$$

die zugehörige Gradierung. Die Gradierung ihrer Produkte sei $|AB| = |A| + |B| \mod 2$. Der gradierte Kommutator

$$[A, B]_{\pm} = AB - (-)^{|A||B|} BA$$

ist, wenn nicht A und B fermionisch sind, der Kommutator sonst der Antikommutator. Zeigen Sie die Produktregel

$$[A, BC]_{\pm} = [A, B]_{\pm} C + (-)^{|A||B|} B [A, C]_{\pm} \ .$$

[2] Das bosonische Feld $\mathcal{L}(x)$ sei als Polynom aus lokalen fermionischen und bosonischen Feldern $\phi(x)$ und ihren Ableitungen zusammengesetzt

$$[\phi(x), \phi(y)]_{\pm} = 0 \quad \text{falls} \quad (x-y)^2 < 0 \ .$$

Warum ist dann $\mathcal{L}(x)$ ein lokales Feld? (5 P.)

H::2 *Fermionisches Dirac-Feld*:

[1] Das Dirac-Feld

$$\Psi(x) = \int \tilde{\mathrm{d}}p (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} v_\sigma(p) d^\dagger_\sigma(p) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} u_\sigma(p) b_\sigma(p))$$

enthält Erzeuger $d^\dagger_\sigma(p)$ und Vernichter $b_\sigma(p)$, die die gradierten Kommutatorrelationen

$$[d_{\sigma'}(q), d^\dagger_\sigma(p)]_{\pm} = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \ , \quad [d_{\sigma'}(q), d_\sigma(p)]_{\pm} = 0 = [d^\dagger_{\sigma'}(q), d^\dagger_\sigma(p)]_{\pm}$$

erfüllen. Zeigen Sie, daß die Felder $\Psi(x)$ und $\overline{\Psi}(x)$ lokale Felder sind, wenn $\Psi(x)$ fermionisch ist, nicht aber, wenn es ein bosonisches Feld wäre.

[2] Die Zeitordnung ordnet Polynomen in Feldern $\phi(x)$, die zunächst als formale Zeichenketten zu lesen sind, linear Operatoren so zu,

$$T(\phi(x) + \chi(y)) = T(\phi(x)) + T(\chi(y)) \ ,$$
$$T(\lambda\phi(x)) = \lambda T(\phi(x)) \ , \quad T(1) = 1 \ , \quad T(\phi(x)) = \phi(x) \ ,$$
$$T(\phi(x)\chi(y)) = \begin{cases} \phi(x)\chi(y) & \text{falls } x^0 > y^0 \\ (-)^{|\phi||\chi|}\chi(y)\phi(x) & \text{falls } x^0 \le y^0 \end{cases}$$

daß die Zeitargumente der Operatoren von nach links nach rechts abnehmen. Zeigen Sie

$$T(\phi(x)\chi(y)) = (-)^{|\phi||\chi|} T(\chi(y)\phi(x)) \ .$$

Die Argumente der Zeitordnung sind also nicht Operatoren, sondern gradiert kommutative Felder.

[3] Berechnen Sie, analog zur Vorlesung, den Propagator des fermionischen Dirac-Feldes

$$\langle \Omega | T(\Psi(x)\overline{\Psi}(y))\Omega \rangle$$

Erfüllen die Argumente der Zeitordnung die Dirac-Gleichung? (15 P.)