P::1 *Masseloser Grenzfall*: Betrachten Sie den Grenzfall $m \to 0$ für das kausale Skalarfeld aus XI::H::I.

[1] Berechnen Sie $\int \tilde{\mathrm{d}}p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$ für $m \to 0$. Diskutieren Sie, warum im Sinne von Distributionen Terme wie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\to\infty)x}$ nicht beitragen, wobei hier $x = |\mathbf{x}|$ und $p = |\mathbf{p}|$ ist.

[2] Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Vergleich mit der Asymptotik der Funktion $K_1(z)$ aus der Lösung aus XI::H::I für kleine Argumente.

[3] Diskutieren Sie die Lokalisierbarkeit von Lösungen der Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial_t\Psi = \sqrt{p^2 + m^2}\Psi$ im massiven und masselosen Fall. Gehen Sie von einem stark lokalisiertem Anfangszustand bei $t = 0$ aus.

H::1 *Spuren von γ-Matrizen und Streuquerschnitte*: Um aus den S-Matrixelementen Streuquerschnitte auszurechnen, muß man das Betragsquadrat von Amplituden bilden. Ist bei Experimenten die Spinrichtung des einlaufenden Elektrons gleichmäßig verteilt, so muß man den Wirkungsquerschnitt über die Spins mitteln. Unterscheidet der Detektor nicht nach Spin des auslaufenden Elektrons, ist der Wirkungsquerschnitt über diesen Spin zu summieren.

[1] Führen Sie mit Hilfe von $\sum_\sigma u_\sigma \bar{u}_\sigma = 2\frac{\not p + m}{2m}$ die Summe über die Spins durch, und zeigen Sie für eine 4×4-Matrix $A \sim \gamma^{m_1} \dots \gamma^{m_k}$

$$\sum_{\sigma,\sigma'} |\bar{u}_{\sigma'}(p')\, A\, u_\sigma(p)|^2 = \operatorname{tr}\left[A\left(2\frac{\not p + m}{2m}\right)\gamma^0 A^\dagger \gamma^0 \left(2\frac{\not p' + m}{2m}\right)\right] .$$

Schreiben Sie $\gamma^0 A^\dagger \gamma^0$ als Produkt von γ-Matrizen.

[2] In XI::H::2 wurde das S-Matrixelement zweiter Ordnung weitgehend ausgerechnet. Es enthält den Faktor

$$\bar{u}_{\sigma'}(p')\left[\not\epsilon^*(k')\left(\frac{-\mathrm{i}(\not p + \not k) + m}{(p+k)^2 - m^2}\right)\not\epsilon(k) + \not\epsilon(k)\left(\frac{-\mathrm{i}(\not p - \not k') + m}{(p-k')^2 - m^2}\right)\not\epsilon^*(k')\right] u_\sigma(p) .$$

Welche Spur muß man also ausrechnen, um den gemittelten Streuquerschnitt zu berechnen?

[3] Für Spuren über γ-Matrizen sind ein paar Identitäten sehr nützlich, die Sie im folgenden beweisen sollen: Zeigen Sie für $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ die Eigenschaften $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$ und $\gamma^5\gamma^k\gamma^5 = -\gamma^k$. Zeigen Sie damit, daß die Spur über ein Produkt einer ungeraden Anzahl von γ-Matrizen verschwindet.

[4] Zeigen Sie, daß die Spur über ein Produkt einer geraden Anzahl von γ-Matrizen durch viermal eine gradierte Summe aller vollständigen Kontraktionen gegeben ist. Zeigen Sie dazu für $A = \gamma^{m_1}\gamma^{m_2}\dots\gamma^{m_{2k-1}}$, daß

$$\operatorname{tr}(\gamma^m A) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\gamma^m A + A\gamma^m) = \frac{1}{2}\sum_j 2\eta^{m\,m_j}(-)^{j+1}\operatorname{tr}(\gamma^{m_1}\dots\gamma^{m_{j-1}}\gamma^{m_{j+1}}\dots\gamma^{m_{2k-1}})$$

ist, und durch Rekursion

$$\operatorname{tr}(\gamma^{m_{2k}} A) = 4\sum \operatorname{sign}(\pi)\,\eta^{m_{a_1} m_{b_1}}\dots\eta^{m_{a_k} m_{b_k}} ,$$

wobei die Summe über alle Zerlegungen der Menge $\{m_1, \dots, m_{2k}\}$ in zweielementige Teilmengen $\{a_i, b_i\}$, $a_i < b_i$, $a_i < a_{i+1}$, läuft, und π diejenige Permutation ist, die die Zerlegung mit der Standardzerlegung verknüpft, $\pi\big((a_1 b_1)\dots(a_k b_k)\big)\pi^{-1} = ((1,2)\dots(2k-1,2k))$. Geben Sie das Ergebnis für Produkte von bis einschließlich sechs γ-Matrizen explizit an. Finden Sie eine einfache graphische Darstellung, indem Sie jede γ-Matrix durch einen Punkt markieren und die Kontraktionen zu η-Matrizen durch verbindende Linien. Wie können Sie an diesen Graphen das Vorzeichen der entsprechenden Terme ablesen?

[5] Durch konsequentes Auswerten sämtlicher Spuren von γ-Matrizen können Wirkungsquerschnitte vollständig ausgerechnet werden. Für die Compton-Streuung aus XI::H::2 lautet das Endergebnis, zusätzlich über die Polarisationen des einlaufenden Photons gemittelt,

$$\frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\sigma,\sigma'} \mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{64\pi^2 m^2}\left(\frac{k0'}{k0}\right)^2 \left(\frac{k0}{k0'} + \frac{k0'}{k0} - 2(\hat{\mathbf{k}}\cdot\epsilon(k'))^2\right) \mathrm{d}\Omega\,.$$

Beschreiben Sie in eigenen Worten, was dieses Resultat für die Polarisation des gestreuten Photons bedeutet. Erklären Sie damit, warum das Licht von Doppelsternsystemen, bei denen der kühlere Partner den heißeren fast bedeckt, polarisiert ist. *Hinweis*: Sehen Sie dazu ruhig in der Literatur nach, z.B. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, I*, Seite 368. (20 P.)