P::1 Ein Einteilchenzustand der Masse m sei als

$$|\Psi\rangle = \int \tilde{\mathrm{d}}p\, f(\mathbf{p})\, a^\dagger(\mathbf{p})\, |\Omega\rangle \qquad \text{mit} \qquad [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3\, 2p^0\, \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

gegeben. Welche Linearkombination kontinuumsnormierter Impulseigenzustände

$$\int \mathrm{d}^3p\, \tilde{\Psi}(\mathbf{p})\, |\Gamma_{\mathbf{p}}\rangle \qquad \text{mit} \qquad \langle\Gamma_{\mathbf{p}}|\Gamma_{\mathbf{p}'}\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

ist er? Wie hängt $|\Gamma_{\mathbf{p}}\rangle$ mit $a^\dagger(\mathbf{p})|\Omega\rangle$ zusammen, wie $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ und $\Psi(\mathbf{x}) = \langle\Lambda_{\mathbf{x}}|\Psi\rangle$ mit $f(\mathbf{p})$? Hierbei sind $\langle\Lambda_{\mathbf{x}}|\Lambda_{\mathbf{x}'}\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ koninuumsnormierte Ortseigenzustände und es gilt

$$\langle\Lambda_{\mathbf{x}}|\Gamma_{\mathbf{p}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,.$$

P::2 Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\Gamma_{\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2'}|\Gamma_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}\rangle$ von Zuständen $|\Gamma_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|\Omega\rangle$, wobei $[a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})] = 0$ und $[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3\, 2p^0\, \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ ist.

P::3 Ein freies, relativistisches Teilchen der Masse m habe Impuls $\mathbf{p}$. Welche Energie hat es? Welche Masse und Energie hat das Antiteilchen?

P::4 Betrachten Sie die Kinematik der Compton-Streuung $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$:

$$\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E' \\ E'\cos\theta \\ ? \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Wert hat die y-Komponente des Viererimpulses k' des gestreuten Photons (*Hinweis*: $(k')^2 = 0$)? Welche Werte haben die Komponenten des Viererimpulses p' des gestreuten Elektrons? Verwenden Sie $(p')^2 = m^2$ und geben Sie $\frac{m}{E'}$ als Funktion von $\frac{E}{m}$ und $\cos\theta$ an.

P::5 Es gilt $[P^m, a^\dagger(\mathbf{q})] = q^m a^\dagger(\mathbf{q})$. Zeigen Sie, daß der Zustand $a^\dagger(\mathbf{q})|\mathbf{k}\rangle$ Eigenzustand von P^m mit Eigenwert $q^m + k^m$ ist, wenn $a^\dagger(\mathbf{q})|\mathbf{k}\rangle$ nicht verschwindet und $|\mathbf{k}\rangle$ Eigenzustand zum Eigenwert k^m ist.

P::6 Betrachten Sie $\int \tilde{\mathrm{d}}p\,\tilde{\mathrm{d}}q\, f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, b^\dagger_\sigma(\mathbf{p})\, b^\dagger_{\sigma'}(\mathbf{q})\, |\Omega\rangle$. Wie hängt f von $\mathbf{p},\mathbf{q},\sigma,\sigma'$ ab, damit dieser Zustand rotationsinvariant ist und keinen Spin trägt?

P::7 Die Wigner-Rotationen sind definiert als $W(\Lambda, p) = L^{-1}_{\Lambda_p}\Lambda L_p$. Zeigen Sie $W(\Lambda_2\Lambda_1, p) = W(\Lambda_2, \Lambda_1 p)W(\Lambda_1, p)$.

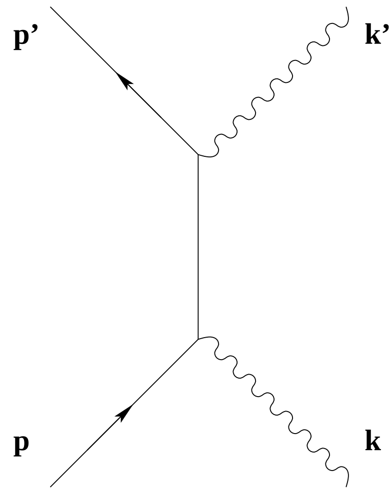
P::8 Zeigen Sie mit Hilfe von $\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn}$, daß $\not{p}^2 = p^2$ ist und zeigen Sie mit Hilfe von $(-\not{p} + m)u_\sigma(p) = 0$ die Gordon-Identität

$$\overline{u}_\sigma(p)\gamma^m u_{\sigma'}(q) = \frac{1}{2m}\overline{u}_\sigma(p)(p^m + q^m)u_{\sigma'}(q) + \frac{1}{4m}\overline{u}_\sigma(p)[\gamma^n, \gamma^m](p_n - q_n)u_{\sigma'}(q)\,.$$

P::9 Der Propagator des Fermions ist

$$\langle T\,\psi(y)\overline{\psi}(x)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,p\cdot(y-x)}\,\frac{\mathrm{i}\,(\not p + m)}{p^2 - m^2 - \mathrm{i}\epsilon}\,.$$

Welche Distribution ist $(\mathrm{i}\not\partial + m)\langle T\,\psi(x)\overline{\psi}(0)\rangle$? Verwenden Sie den Propagator sowie $\psi(x)b^\dagger_\sigma(\mathbf{p})|\Omega\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u_\sigma(p)$, $A_m(x)a^\dagger_\tau(\mathbf{k})|\Omega\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\varepsilon_{m,\tau}(k)$ und $\mathcal{L}_{\text{int}} = e{:}\overline{\psi}(x)\gamma^m\psi(x)A_m(x){:}$, und geben Sie damit den Beitrag zum S-Matrixelement $\langle \mathbf{p}',\sigma',\mathbf{k}',\tau'|S|\mathbf{p},\sigma,\mathbf{k},\tau\rangle$ an, der durch den folgenden Feynmann-Graphen dargestellt wird:



P::10 Sei $\Psi(t)$ ein beliebiger Zustand in einem Zweizustandssystem. Wie verhält sich im Laufe der Zeit t die Wahrscheinlichkeit, bei irgendeiner Messung den ersten der beiden möglichen Meßwerte zu erhalten?