**P::1** *Störungstheorie*: Wiederholen Sie die Entwicklung der Eigenwerte $E(\lambda)$ eines Hamiltonoperators $H(\lambda) = H_0 + \lambda V$ im Störparameter $\lambda$, $|\lambda| \ll 1$. Die Energie-Eigenwerte für den ungestörten Hamiltonoperator $H_0 = H(0)$ seien bekannt, $E_n \equiv E_n(0)$, ebenso die Eigenzustände $|\Psi_n\rangle \equiv |\Psi_n(0)\rangle$. Gesucht ist die Entwicklung der Lösung der Gleichung

$$\Big(H(\lambda) - E_n(\lambda)\Big)\,|\Psi_n(\lambda)\rangle = 0 \qquad (*)$$

für $\lambda \sim 0$. Dies erreichen Sie dadurch, dass sie die Ableitungen $\partial_\lambda E_n(\lambda)$ und $\partial_\lambda \Psi_n(\lambda)$ bestimmen.

**[1]** Machen Sie sich klar, daß für die Eigenzustände $|\Psi_n(\lambda)\rangle$ eines hermiteschen Operators $H(\lambda)$ durch Wahl der Normierung und der Phase die Bedingungen

$$\begin{aligned}\langle\Psi_m(\lambda)|\Psi_n(\lambda)\rangle &= \delta_{m,n}\,,\\ \langle\Psi_m(\lambda)|\frac{\partial}{\partial\lambda}\Psi_n(\lambda)\rangle_{|m=n} &= 0\end{aligned}$$

immer erfüllt werden können.

**[2]** Differenzieren Sie $(*)$ nach $\lambda$ und nutzen Sie die beiden Bedingungen aus **[1]**, um die Formel

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}E_n = \langle\Psi_n|\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}H\right)|\Psi_n\rangle$$

herzuleiten, indem Sie das Skalarprodukt mit $\langle\Psi_n|$ bilden.

**[3]** Leiten Sie die entsprechende Formel für $\Psi_n$ her, indem Sie in der Rechnung in **[2]** nun das Skalarprodukt mit $\langle\Psi_m|$ für $m \neq n$ bilden. Sie sollten damit die Formel

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Psi_n = -\sum_{m\neq n}\Psi_m\frac{\langle\Psi_m|\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}H\right)|\Psi_n\rangle}{E_m - E_n}$$

erhalten.

**[4]** Die Formeln für die Ableitungen von $E_n$ und $\Psi_n$ an der Stelle $\lambda = 0$ bilden ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen. Nutzen Sie es, um die Korrekturen der Energie-Eigenwerte in zweiter und dritter Ordnung zu bestimmen, d.h. berechnen Sie $\partial_\lambda^2 E_n$ und $\partial_\lambda^3 E_n$.

**[5]** Betrachten Sie nun einen Operator $\rho(t)$, der der Gleichung $i\hbar\partial_t\rho = [H,\rho]$ genügt. Übertragen Sie den Sachverhalt in **[2]** in geeigneter Weise um zu zeigen, daß die Eigenwerte $\rho_n(t)$ erhalten sind, daß also gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_n = 0\,.$$

Daher ist die Entropie $S = -\sum_n \rho_n \ln\rho_n$ zeitunabhängig, solange die Zeitentwicklung mit der Schrödingergleichung berechenbar ist.

**H::1** *Zeitentwicklung im Zweizustandssystem*: Ein quantenmechanisches System besitze nur zwei Energie-Eigenzustände $|\Lambda_1\rangle$ und $|\Lambda_2\rangle$ zu den beiden unterschiedlichen Energien $E_1$ und $E_2$.

**[1]** Wie sieht in dieser Basis ein beliebiger Zustand $\Psi(t)$ zur Zeit $t = 0$ aus, und wie entwickelt er sich im Laufe der Zeit?

**[2]** Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $w(1, A, \Psi(t))$ an, für eine beliebige Observable $A$ den ersten Meßwert zu beobachten. Hinweis: Es hilft, Bezeichnungen für die Komponenten des ersten Eigenvektors von $A$ einzuführen.

**[3]** Warum kann nur die Energiedifferenz $E_1 - E_2$ gemessen werden? (8 P.)

**H::2** *Zeitentwicklung im Zweizustandssystem mir periodischer Störung*: Betrachten Sie nun ein System mit einem periodisch mit Frequenz $\omega'$ zeitlich veränderlichen Hamiltonoperator

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t} \\ \delta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t} & 0 \end{pmatrix} .$$

**[1]** Finden Sie zwei normierte Lösungen $\Psi_+(t)$ und $\Psi_-(t)$ der Form

$$\Psi_+(t) = \begin{pmatrix} c_{1,+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_+ t} \\ c_{2,+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_+ + \omega')t} \end{pmatrix} , \qquad \Psi_-(t) = \begin{pmatrix} c_{1,-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_- t} \\ c_{2,-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_- + \omega')t} \end{pmatrix}$$

der Schrödingergleichung $\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi_\pm(t) = H\Psi_\pm(t)$. Die Lösung dieses Problems besteht darin, die Koeffizienten $c_1, c_2$ und die Frequenzen $\omega_+, \omega_-$ zu bestimmen.

**[2]** Wie sieht ein beliebiger Zustand $\Psi(t)$ zur Zeit $t = 0$ in der Basis $\Psi_\pm(0)$ aus? Wie entwickelt er sich im Laufe der Zeit?

**[3]** Geben Sie wieder die Wahrscheinlichkeit $w(1, A, \Psi(t))$ an, den ersten Meßwert einer beliebigen Observable $A$ zu beobachten. Arbeiten Sie dabei weiter in der oben eingeführten Basis $\Psi_\pm(0)$.

**[4]** Welche Frequenzen können also gemessen werden? (12 P.)