H::1 *Eine nützliche Formel*: In der Vorlesung wird die Reihenentwicklung des Zeitentwicklungsoperators im Wechselwirkungsbild benötigt. Im allgemeinen Fall tritt das Problem auf, daß für einen Operator $A(\lambda)$, der von einem Parameter λ abhängt, durchaus der Kommutator $[A(\lambda), \partial_\lambda A(\lambda)] \neq 0$ sein kann. Um diesen Fall behandeln zu können, ist die Formel

$$\partial_\lambda \mathrm{e}^{A(\lambda)} = \int_0^1 \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{zA(\lambda)}\, \partial_\lambda A(\lambda)\, \mathrm{e}^{(1-z)A(\lambda)} \qquad (*)$$

sehr nützlich. Beweisen Sie diese Formel, indem Sie wie folgt vorgehen:

[1] Beweisen Sie die kombinatorische Formel

$$\int_0^1 \mathrm{d}z\, z^k\, (1-z)^\ell = \frac{k!\ell!}{(k+l+1)!} \qquad (**)$$

durch vollständige Induktion.

[2] Entwickeln Sie damit beide Seiten der Formel $(*)$ in Taylorreihen, wobei Sie beachten müssen, daß $A(\lambda)$ und $\partial_\lambda A(\lambda)$ nicht miteinander kommutieren. Mit der kombinatorischen Formel $(**)$ folgt nun das gewünschte Ergebnis. (9 P.)

H::2 *Hauptwert*: Bei der Behandlung des instabilen Teilchens tritt der nicht ganz einfache Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x+\mathrm{i}\epsilon}$ auf.

[1] Wenden Sie $\frac{1}{x+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{x-\mathrm{i}\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$ auf eine reelle Testfunktion $f(x)$ an. Betrachten Sie zunächst nur den Imaginärteil und substitutieren Sie $x = \epsilon\frac{x}{\epsilon} \equiv \epsilon u$. Sie können jetzt den Grenzwert $\epsilon \to +0$ ausführen.
Hinweis: Der Limes muss für $\epsilon > 0$ ausgeführt werden, da bei der Substitution ein $\mathrm{sign}(\epsilon)$ auftritt.

[2] Schreiben Sie den so erhaltenen Grenzwert mit Hilfe der Dirac-δ-Distribution um, indem Sie $f(0) = \int \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x)$ setzen.

[3] Betrachten Sie nun den Realteil. Machen Sie sich klar, daß $\frac{x}{x^2+\epsilon^2}$ unter $x \to -x$ ungerade ist. Die Testfunktion falle genügend schnell für große x ab. Ihr ungerader Anteil sei definiert durch $f(x) - f(-x) = 2x\hat{f}(x)$. Nur dieser Anteil trägt unter dem Integral mit dem Realteil bei. Drücken Sie also das Integral $\int \mathrm{d}x (f(x) - f(-x))\frac{x}{x^2+\epsilon^2}$ durch einen Term $\int \mathrm{d}x\, \hat{f}(x)$ und einen weiteren Term aus. In dem zweiten Term substitutieren Sie wieder $x = \epsilon\frac{x}{\epsilon} \equiv \epsilon u$, so daß Sie den Grenzwert $\epsilon \to 0$ ausführen können.

[4] Die Testfunktion $f(x)$ sei differenzierbar. Dann kann $\hat{f}(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzt werden. Machen Sie sich klar, daß $\hat{f}(0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ ist.

[5] Das Integral über $\hat{f}$ ist der sogenannte *Hauptwert* von $\frac{1}{x}$, englisch *principal value*, $\mathrm{PV}\frac{1}{x}$, integriert mit einer Testfunktion $f(x)$. Zeigen Sie, daß in der Tat

$$\int \mathrm{d}x\, \hat{f}(x) = \lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x} \right)$$

ist, was auch $\mathrm{PV} \int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x} f(x)$ geschrieben wird. Sie erhalten somit das Ergebnis

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x + \mathrm{i}\epsilon} = \mathrm{PV}\frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\delta(x)\,. \qquad \text{(8 P.)}$$

H::3 *Residuum*: Berechnen Sie explizit für eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

das Umlaufintegral entlang eines Kreises, und zeigen Sie damit

$$\oint \mathrm{d}z\, f(z) = 2\pi\mathrm{i}\, a_{-1}\,. \qquad \text{(3 P.)}$$