P::1 *Wigner-Theorem*: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß zu jeder invertierbaren Abbildung T von Strahlen $\Psi \sim \lambda\Psi$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, eines Hilbertraumes, d.h.

$$\begin{array}{rcl} \psi & \overset{T}{\mapsto} & T\psi \\ \lambda\psi & \mapsto & \lambda_\psi T\psi \,, \end{array}$$

die alle Wahrscheinlichkeiten erhält,

$$\forall\ \phi, \psi : \frac{|\langle T\phi|T\psi\rangle|^2}{\langle T\phi|T\phi\rangle\langle T\psi|T\psi\rangle} = \frac{|\langle\phi|\psi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}\,,$$

eine unitäre Abbildung $\mathcal{U}$ oder eine anti-unitäre Abbildung $\mathcal{A}$ des Hilbertraumes gehört. Beim Beweis bleibt allerdings noch zu zeigen, daß die unitäre bzw. anti-unitäre Realisierung auch für *alle* Strahlen im Hilbertraum *einheitlich* gewählt werden kann. Es werden die Bezeichungen aus der Vorlesung verwendet. Bezeichne also χ_k eine orthonormale Basis, $\langle\chi_k|\chi_l\rangle = \delta_{kl}$, und seien o.B.d.A. normierte Repräsentanten der Strahlen gewählt, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Ein solcher Repräsentant eines Strahles besitzt also die Entwicklung $\psi = \sum_k \psi_k\chi_k$ mit $\sum_k |\psi_k|^2 = 1$. Die Transformation T bildet orthonormale Basen auf orthonormale Basen ab, d.h.

$$T\chi_k = \chi'_k e^{i\alpha_k}\,, \qquad \text{mit} \qquad \langle\chi'_k|\chi'_l\rangle = \delta_{kl}\,.$$

[1] Zeigen Sie zunächst, daß einheitlich für alle Strahlen $V_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + i\chi_k)$ gilt, daß die transformierten Strahlen $V'_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + i\chi_k)'$ *entweder alle* von der Form $\frac{e^{i\alpha_k}}{\sqrt{2}}(\chi'_1 + i\chi'_2)$ sind (unitäre Realisierung), *oder alle* von der Form $\frac{e^{i\alpha_k}}{\sqrt{2}}(\chi'_1 - i\chi'_2)$ sein müssen (anti-unitäre Realisierung). Dazu nehmen Sie das Gegenteil an, daß also z.B. für V_k eine unitäre Realisierung gewählt werden kann, für V_l, $l \neq k$ jedoch eine anti-unitäre. Betrachten Sie $\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\chi_1 + i\chi_k + i\chi_l)$ und führen Sie die Annahme auf einen Widerspruch.

[2] Im letzten Schritt müssen Sie nun noch zeigen, daß in der Tat alle Strahlen ψ einheitlich alle linear oder alle anti-linear transformieren müssen, genau wie die V_k. Nehmen Sie dafür an, daß $V'_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi'_1 + i\chi'_k)$ für alle V_k gilt, daß es aber ein $\psi = \sum_k \psi_k\chi_k$ gibt, so daß es beim transformierten Strahl $\psi' = e^{i\alpha}\psi'_1 \sum_k \chi'_k \left(\frac{\psi_k}{\psi_1}\right)^*$ ein l gibt, für das $\left(\frac{\psi_l}{\psi_1}\right)^* \neq \left(\frac{\psi_l}{\psi_1}\right)$ ist. Führen Sie auch dies auf einen Widerspruch.

Hinweis: Beachten Sie, daß es nur auf die relativen Phasen ankommt, wie es in der Schreibweise für ψ' und die χ'_k nahegelegt wird.

H::1 *Die Überlagerungsgruppe der Lorentz-Gruppe*: In dieser Aufgabe soll erarbeitet werden, daß die Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ der Möbius-Transformationen die Überlagerungsgruppe der Lorentz-Gruppe darstellt. Wenn die Lösung dieser Aufgabe Probleme bereitet, konsultieren Sie ruhig die Literatur, z.B. das Skript *Geometrie der Relativitätstheorie*, das Sie unter `http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/` finden.

[1] Zeigen Sie, daß jede komplexe Matrix g mit Determinante 1 eindeutig als $g = \mathrm{e}^h U$ geschrieben werden kann, wobei h eine hermitesche, spurfreie Matrix ist, $h = h^\dagger$, $\operatorname{tr} h = 0$, und U eine unitäre Matrix ist mit Determinante 1. Wie ist h durch g und $g^\dagger$ zu definieren, wie U?

[2] Zeigen Sie, daß eine beliebige unitäre 2×2 Matrix U mit $\det U = 1$ wegen $U^\dagger U = \mathbb{1}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

ist und demnach eindeutig zu einem Punkt auf der dreidimensionalen Kugeloberfläche S^3 gehört.

[3] Zeigen Sie für die Exponentialreihe von Pauli-Matrizen

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = \cos\alpha + \mathrm{i}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\alpha\,, \qquad \mathrm{e}^{\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = \cosh\alpha + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh\alpha\,,$$

indem Sie $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{1}$ verwenden und gerade und ungerade Potenzen zusammenfassen. Vergleichen Sie mit U und begründen Sie, daß jedes Paar komplexer Zahlen mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ als $a = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\, n_z$ und $b = \mathrm{i}(n_x + \mathrm{i}n_y)\sin\alpha$ geschrieben werden kann.

[4] Betrachten Sie hermitsche 2×2 Matrizen

$$K = \begin{pmatrix} k^0 - k^3 & -k^1 + \mathrm{i}k^2 \\ -k^1 - \mathrm{i}k^2 & k^0 + k^3 \end{pmatrix} = k^0\mathbb{1} - (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

und die Transformation $K \mapsto K' = gKg^\dagger$ mit $g = U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})}$. Zerlegen Sie dazu $K = k^0\mathbb{1} - k_\parallel(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - (\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\sigma})$ in parallele und senkrechte Anteile und zeigen Sie getrennt $k'^0 = k^0$, $k'_\parallel = k_\parallel$ und $\mathbf{k}'_\perp = \cos\alpha\mathbf{k}_\perp + \sin\alpha(\mathbf{n}\times\mathbf{k}_\perp)$. Verwenden Sie dabei Aufgabenteil **[3]** und die Identität

$$(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\mathbb{1} + \mathrm{i}(\mathbf{m}\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\sigma}\,.$$

Welche andere Matrix U' bewirkt dieselbe Drehung von $\mathbf{k}$ wie U?

[5] Betrachten Sie nun $K \mapsto K' = gKg^\dagger$ für $g = \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})}$. Zeigen Sie, daß dies eine drehungsfreie Lorentztransformation von (k^0, k^1, k^2, k^3) ist, daß nämlich $\mathbf{k}'_\perp = \mathbf{k}_\perp$ wegen $(\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = -(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\sigma})$ gilt, und indem Sie

$$\Big(k^0 - k_\parallel(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Big)\left(\cosh\frac{\alpha}{2} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \Big(k'^0 - k'_\parallel(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Big)$$

ausmultiplizieren und die Lorentztransformation ablesen:

$$\begin{pmatrix} k'^0 \\ k'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k^0 \\ k_\parallel \end{pmatrix}.$$

(20 P.)