P::1 *Parität und Zeitumkehr*: Die volle Lorentz-Gruppe enthält neben den orthochronen eigentlichen Lorentz-Transformationen noch diskrete Transformationen, eben die Parität und die Zeitumkehr, die hier studiert werden sollen. Zur Notation: Viererimpulse ruhender Teilchen sind durch Unterstreichen gekennzeichnet, $\underline{p}$.

[**1**] Überlegen Sie, wie sich die Generatoren $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$ und M^{0k} der Lorentz-Gruppe (Impuls, Drehimpuls, drehungsfreier Boost) unter dem Paritätsoperator Π und dem Zeitumkehroperator T transformieren. Vergleichen Sie schließlich noch für $U = \exp(\frac{i}{2}M^{0k}\omega_{0k})$ die Transformierten $\Pi U \Pi^{-1}$ und $\mathsf{T}U\mathsf{T}^{-1}$, wobei Sie beachten, daß T anti-linear realisiert ist.

[**2**] Betrachten Sie einen Zustand für ein ruhendes Spin 1/2 Teilchen, $\chi_{\underline{p},\sigma}$. Es gilt also $\mathbf{P}\chi_{\underline{p},\sigma} = 0$ und $J_3\chi_{\underline{p},\sigma} = \sigma\chi_{\underline{p},\sigma}$. Für einen nicht entarteten solchen Zustand wird nun der Ansatz $\Pi\chi_{\underline{p},\sigma} = \eta_\sigma\chi_{\underline{p},\sigma}$ gemacht. Zeigen Sie $[\Pi, J_\pm] = 0$ und folgern Sie aus der Wirkung von $J_\pm$ auf $\chi_{\underline{p},\sigma}$, daß η_σ eine reine Phase sein muss. Was folgt dann aus $\Pi^2 = \mathbb{1}$?

[**3**] Der Zustand aus [**2**] wird nun geboostet, $\chi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{m}{p^0}}U_{L_p}\chi_{\underline{p},\sigma}$. Was ergibt sich für $\Pi\chi_{p,\sigma}$?

H::1 *Immer noch Parität und Zeitumkehr*: Die Betrachtungen aus der Präsenzübung sollen jetzt vervollständigt werden. Zur Notation: Viererimpulse ruhender Teilchen sind wie in der Präsenzübung durch Unterstreichen gekennzeichnet, $\underline{p}$.

[1] Gehen Sie wieder von einem ruhenden Spin 1/2 Teilchen aus, dessen Zustand wie in **P::2::[2]** gegeben ist. Machen Sie den Ansatz $\mathsf{T}\chi_{\underline{p},\sigma} = \zeta_\sigma \chi_{\underline{p},\sigma}$. Was ergibt sich für einen bewegten Zustand, d.h. was ist $\mathsf{T}\chi_{p,\sigma}$ und welche Einschränkung finden Sie für ζ_σ ?
Hinweis: Um zu zeigen, daß ζ_σ für ein ruhendes Teilchen mit ζ'_σ eines bewegten Teilchens übereinstimmt, betrachten Sie $\langle \mathsf{T}\chi_{\underline{p},\sigma} | \mathsf{T}\chi_{p,\sigma'}\rangle$.

[2] Studieren Sie, was sich für $\mathsf{T}J_\pm \chi_{\underline{p},\sigma}$ ergibt. Bestimmen Sie damit, wie ζ_σ von σ abhängt. Absorbieren Sie eine globale aber unbestimmbare Phase in $\chi_{\underline{p},\sigma}$ um Ihren endgültigen Ausdruck für $\mathsf{T}\chi_{\underline{p},\sigma}$ zu finden.

[3] Betrachten Sie schließlich den geboosteten Zustand $\chi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{m}{p^0}}\, U_{L_p} \chi_{\underline{p},\sigma}$ und geben damit den endgültigen Ausdruck für $\mathsf{T}\chi_{p,\sigma}$ an. (5 P.)

H::2 *Gammaitis*: Die Diracschen Gamma-Matrizen sind bei der relativistischen Behandlung von Spin 1/2 Teilchen in der Quantenmechanik sehr wichtig. Wir verwenden sie in der folgenden Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar\sigma^m & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^m = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \qquad \bar\sigma^m = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3).$$

Hierbei sind die σ^k, $k = 1, 2, 3$, die Pauli-Spinmatrizen, und $\sigma^0 = 1\!\!1$.

[1] Zeigen Sie $\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn}$. Hierbei bezeichnet $\{A, B\} = AB + BA$ den Anti-Kommutator.

[2] Zeigen Sie, daß die adjungierten Gamma-Matrizen gegeben sind durch $\gamma^{m\dagger} = \gamma^0\gamma^m\gamma^0$. Zeigen Sie ferner, daß diese Darstellung der Gamma-Matrizen eine unitäre Darstellung ist, also daß $\gamma^{m\dagger} = (\gamma^m)^{-1}$ ist.

[3] Man definiert $\Sigma^{mn} = -\frac{1}{4}[\gamma^m, \gamma^n]$. Prüfen Sie nach, daß

$$\Sigma^{jk} = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{jkl}\begin{pmatrix} +\sigma^l & \\ & +\sigma^l \end{pmatrix}, \qquad \Sigma^{0k} = -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^k & \\ & +\sigma^k \end{pmatrix}$$

ist. Zeigen Sie $[\Sigma^{kl}, \gamma^m] = \eta^{km}\gamma^l - \eta^{lm}\gamma^k$ und berechnen Sie anschließend $[\Sigma^{mn}, \Sigma^{kl}]$.

[4] Man führt eine weitere Gamma-Matrix ein, nämlich $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. Wie sieht sie aus? Zeigen Sie, daß $\gamma^5 = \gamma^{5\dagger}$ ist.

[5] Mit der γ^5-Matrix kann man die Operatoren $\frac{1}{2}(1\!\!1 \pm \gamma^5)$ einführen. Zeigen Sie, daß diese Operatoren Projektoren sind. (10 P.)

H::3 Wir betrachten $(L_p(q-p))^k$, wobei L_p eine drehungsfreie Lorentz-Transformation ist, und sowohl q als auch p auf der Massenschale liegen. Uns interessiert der räumliche Dreier-Vektor davon, d.h. $k \in \{1,2,3\}$. Dieser hat die Form $\overrightarrow{L_p(q-p)} = \frac{1}{|\det J|}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$, wobei $J = \frac{\partial x'}{\partial x}$ der übliche Faktor ist, der in der Jacobi-Determinante auftritt. Die drehungsfreie Lorentz-Transformation L_p hat die Form

$$L_p = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} p^0 & p^j \\ p^k & m\delta^{jk} + \frac{p^j p^k}{p^0+m} \end{pmatrix}, \qquad j,k \in \{1,2,3\}\,.$$

[1] Berechnen Sie zunächst $J = \left.\frac{\partial}{\partial q^j}\right|_{q=p} \overrightarrow{L_p^{-1}(q-p)}$. Nutzen Sie dabei die Bedingung aus, dass sowohl q als auch p auf der Massenschale liegen, daß also $q^0 = \sqrt{m^2+\mathbf{q}^2}$ und $p^0 = \sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$ ist.

[2] Um die Determinante des Ausdruckes aus **[1]** zu berechnen, bestimmen Sie am besten die Eigenwerte der Matrix J. Beachten Sie dabei, daß es sich um eine drehungsfreie Lorentz-Transformation handelt, so daß sie zwei der Eigenwerte sofort angeben können.
Hinweis: Ihr endgültiges Ergebnis sollte $|\det J| = \frac{m}{p^0}$ lauten. (5 P.)