P::1 *Antinuitäre Operatoren*: Es sei T antiunitär, d.h. $\langle T\chi|T\psi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle$. Es sei weiter A ein linearer Operator. Zeigen Sie, daß dann TAT^{-1} linear ist und die Beziehung

$$(TAT^{-1})^\dagger = TA^\dagger T^{-1}$$

erfüllt.

P::2 *Numerisch invariante Tensoren*:

[1] Bestätigen Sie, daß $\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m$ die Komponenten eines numerisch invarianten Tensors sind.

Vollziehen Sie dazu folgende Schritte nach: Definitionsgemäß hängen SL$(2,\mathbb{C})$-Matrizen D und Lorentztransformationen Λ durch ihre Wirkung auf hermitesche 2×2-Matrizen zusammen, $P = \sigma^m\eta_{mn}p^n$, $P = P^\dagger$, $DPD^\dagger = P'$, $p'^n = \Lambda^n{}_k p^k$. Schreiben Sie diese Gleichung für $p^k = \Lambda^{-1\,k}{}_l q^l$, differenzieren Sie nach q^l, und zeigen Sie so

$$D\sigma^m D^\dagger\eta_{mn}\Lambda^{-1\,n}{}_l = \sigma^m\eta_{ml}$$
$$D\sigma^m D^\dagger\eta_{mn}\Lambda^{-1\,n}{}_l\,\eta^{-1\,lk} = \sigma^k\ .$$

[2] Es ist $(\eta\Lambda^{-1}\eta^{-1})_m{}^k = \Lambda^k{}_m$, also $\eta\Lambda^{-1}\eta^{-1} = \Lambda^T$, denn $\Lambda^{T\,-1}\eta\Lambda^{-1} = \eta$ gilt für alle Lorentztransformationen Λ, auch für ihr Inverses. Zusammengenommen gilt also

$$D\sigma^m D^\dagger\Lambda^k{}_m = \sigma^k$$

oder, in voller Indexpracht, daß $\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m$ die Komponenten eines numerisch invarianten Tensors sind

$$D_\alpha{}^\gamma D^{*\,\dot\delta}_{\dot\beta}\Lambda^k{}_m\sigma_{\gamma\dot\delta}{}^m = \sigma_{\alpha\dot\beta}{}^k\ .$$

H::1 *Gordon-Identität*:

[1] Die u -Spinoren $u_\sigma(p)$ erfüllen die Gleichung $(-\gamma^n p_n + m)u_\sigma(p) = 0$. Verwenden Sie $\gamma^{n\,\dagger} = \gamma^0\gamma^n\gamma^0$, um zu zeigen, daß $\overline{u}_\sigma(q) = (u_\sigma(q))^\dagger\gamma^0$ die Gleichung

$$\overline{u}_\sigma(q)(-\gamma^n q_n + m) = 0$$

erfüllt.

[2] Werten Sie die Gleichung

$$0 = \overline{u}_\sigma(p)[\gamma^m(\gamma^n q_n - m) + (\gamma^n p_n - m)\gamma^m]u_{\sigma'}(q)$$

aus, indem sie das Produkt der Gamma-Matrizen symmetrisieren und antisymmetrisieren, $\gamma^m\gamma^n = \frac{1}{2}\{\gamma^m,\gamma^n\} + \frac{1}{2}[\gamma^m,\gamma^n] = \eta^{mn} + \frac{1}{2}[\gamma^m,\gamma^n]$, um die Gordon-Identität

$$\overline{u}_\sigma(p)\gamma^m u_{\sigma'}(q) = \frac{1}{2m}\overline{u}_\sigma(p)(p^m + q^m)u_{\sigma'}(q) + \frac{1}{4m}\overline{u}_\sigma(p)[\gamma^n,\gamma^m](p_n - q_n)u_{\sigma'}(q)$$

zu zeigen. Wie lautet die Gordon-Identität für v-Spinoren? Was besagt sie für $p = q$? (5 P.)

H::2 *Hamilton-Operator*:

[1] Das Dirac-Feld

$$\Psi(x) = \int \tilde{d}p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}v_\sigma(p)d^\dagger_\sigma(p) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u_\sigma(p)b_\sigma(p))$$

enthält fermionische Erzeuger $d^\dagger_\sigma(p)$ und Vernichter $b_\sigma(p)$, die die Antivertauschungsrelationen

$$\{d_{\sigma'}(q), d^\dagger_\sigma(p)\} = (2\pi)^3 2p^0\delta^3(\vec{q}-\vec{p}) \ , \quad \{d_{\sigma'}(q), d_\sigma(p)\} = 0 = \{d^\dagger_{\sigma'}(q), d^\dagger_\sigma(p)\}$$

erfüllen. Sind die Zustände $|\chi_\sigma(p)\rangle = d^\dagger_\sigma(p)|\Omega\rangle$ kontinuumsnormiert?

[2] Zeigen Sie, daß $H = \int\tilde{d}p\, p^0\,(d^\dagger_\sigma(p)d_\sigma(p) + b^\dagger_\sigma(p)b_\sigma(p))$ auf das Vakuum angewendet und auf Einteilchenzuständen der Hamilton-Operator ist, $H|\Omega\rangle = 0$, $H|\chi_\sigma(p)\rangle = \sqrt{m^2+\vec{p}^2}|\chi_\sigma(p)\rangle$.

[3] Die Normalordnung ordnet Polynomen in $d^\dagger_\sigma(p)$, $d_\sigma(p)$, $b^\dagger_\sigma(p)$, $b_\sigma(p)$, die zunächst als formale Zeichenketten zu lesen sind, linear Operatoren zu,

$$: A + B : = : A : + : B : \ , \quad : \lambda A : = \lambda : A : \ , \quad : 1 : = 1 \ ,$$

und zwar so, daß Erzeuger nach links und Vernichter nach rechts angeordnet werden und ein Faktor -1 hinzugefügt wird, falls diese Permutation ungerade ist.

$$\begin{aligned} &: d_{\sigma_1}(p_1)\ldots d_{\sigma_k}(p_k)d^\dagger_{\sigma'_1}(q_1)\ldots d^\dagger_{\sigma'_l}(q_l) : \\ &= \pm d^\dagger_{\sigma'_1}(q_1)\ldots d^\dagger_{\sigma'_l}(q_l)d_{\sigma_1}(p_1)\ldots d_{\sigma_k}(p_k) \end{aligned}$$

Zeigen Sie $: d_\sigma(p)d^\dagger_{\sigma'}(p') : = - : d^\dagger_{\sigma'}(p')d_\sigma(p) :$! Die Argumente der Normalordnung sind also nicht Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, sondern antivertauschende Zahlen.

[4] Zeigen Sie, daß der Operator $\hat{H} = \int d^3x \ : \overline{\Psi}(x)(\mathrm{i}\sum_{i=1}^3\gamma^i\partial_i + m)\Psi(x) :$ bis auf einen Normierungsfaktor mit H übereinstimmt. Absorbiert man diesen Faktor in redefinierten u- und v-Spinoren, so sind sie im Grenzfall $m \to 0$ stetig. Wie lautet der Normierungsfaktor, was sind die redefinierten Spinoren? (15 P.)