Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 11

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 01.07.2008**

[H31] *Ebene elektromagnetische Welle* **(1 + 1,5 + 1,5 = 4 Punkte)**

Nochmal in Ruhe: Im Vakuum hat das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{x}, t)$ einer ebenen, elektromagnetischen Welle die Form

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \mathfrak{Re}\left(\vec{B}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}\right).$$

(a) Welche Bedingung müssen die komplexe Amplitude $\vec{B}_0$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ erfüllen?

(b) Welchen Wert hat ein zugehöriges elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x}, t)$?

(c) Welchen Wert hat die Kreisfrequenz ω?

[H32] *Fourier-Transformation* **(2 + 1 + 1 = 4 Punkte)**

Die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)]$ einer Funktion $f(x)$ (kann auch komplex sein) ist definiert über

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\; e^{-\mathrm{i}kx} f(x)$$

(Abstieg in die Unterwelt) und die Umkehrtransformation via

$$f(x) = \mathcal{F}\left[\tilde{f}(k)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k\; e^{+\mathrm{i}kx} \tilde{f}(k)$$

(Aufstieg in die Oberwelt). Die Fourier-Transformation eignet sich unter anderem dafür, Differentialgleichungen zu lösen.

(a) Zunächst spielen wir einmal die Fourier-Transformation anhand der Funktionen $f(x) = A\cos(kx)$, $-\pi/k \leq x \leq \pi/k$, 0 sonst; und $g(x) = A\delta(x - a)$ durch. $\tilde{f}(k) =$? und $\tilde{g}(k) =$? Welche δ-Darstellung lässt sich durch die Rücktrafo von $\tilde{g}(k)$ dingfest machen?

(b) Als nächstes möchte die Gauß'sche Glockenkurve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

transformiert werden. Was stellt man verwundert fest?

(c) Als Vorbereitung der Präsenzübung in einer Woche bestimmen wir die Fourier-Transformierte der Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Es sollte sich $\mathcal{F}[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}] = \mathrm{i}k\tilde{f}(k)$ ergeben, was phänomenal ist! Denn: In der Unterwelt werden die x-Ableitungen durch feste Werte $\mathrm{i}k$ ersetzt! Das heißt $\partial_x \to \mathrm{i}k$.

[H33] *Wellenpaket* **(2 Punkte)**

Ein Wellenpaket sei gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k\; A(k) e^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t}$$

Man zeige, dass $u(x, t)$ die 1D-Wellengleichung erfüllt, wenn die Dispersionsrelation $\omega(k) = ck$ gilt. Wie lautet die Formel, um aus einem gegebenen $u(x, 0)$ die Amplituden $A(k)$ zu ermitteln?