Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 8

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 10.06.2008**

[H22] *Dirac's Deltafunktion* **(2 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)**

(a) Bei den folgenden Darstellungen der Deltafunktion möchten die Konstanten bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
&\delta(x) = \alpha(\delta(x+\varepsilon) + \delta(x-\varepsilon))\ , \quad \alpha = ?\\
&\text{2D}\ ,\ r = \text{ Polarkoordinate} : \delta(\vec{r}) = \beta\delta(r-\varepsilon)\ , \quad \beta = ?\\
&\text{3D}\ ,\ r = \text{ Kugelkoordinate} : \delta(\vec{r}) = \gamma\delta(r-\varepsilon)\ , \quad \gamma = ?\\
&\text{3D}\ ,\ \rho = \text{ Zylinderkoordinate} : \delta(\vec{r}) = \lambda\delta(z)\delta(\rho-\varepsilon)\ , \quad \lambda = ?
\end{aligned}$$

(b) Dank Testfunktionen $t(x)$ mit geeigneten Eigenschaften lassen sich die folgenden Relationen schnell zeigen, nicht wahr?

$$\begin{aligned}
f(x)\delta'(x) &= f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)\\
f(x)\delta''(x) &= f(0)\delta''(x) - 2f'(0)\delta'(x) + f''(0)\delta(x)
\end{aligned}$$

(c) Man zeige:

$$\phi(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi_\varepsilon(x/\varepsilon)$$

ist allgemeine Darstellung der Delta-Funktion, sofern $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \phi(x) = 1$ ist. Wie wird demnach eine δ-Funktion repräsentiert, die auf $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ basiert?

(d) Gegeben ist die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

mit Skalarpotential $\phi(\vec{x},t)$ und Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$. Was ergibt sich im Spezialfall $\phi(r,t) = \frac{Q}{r}$ für eine Ladungsdichte, $\rho(\vec{r},t) = ?$

[H23] *Gauß'scher Satz eines Zylinderkondensators* **(2 Punkte)**

Der Gauß'sche Satz soll für das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\alpha}{\rho}\theta(\rho - R)\vec{e}_\rho$$

im Würfelvolumen V mit Kantenlänge a verifiziert werden. Dabei ist die linke vordere untere Ecke des Würfels im Urpsrung befindlich. Skizze!

[H24] *Spielmannszug aus Kleinkleckersdorf* **(1 + 2 = 3 Punkte)**

Auf dem Schützenfest sehen wir (liegt's am Bier?) den Spielmannszug aus Kleinkleckersdorf, welche mit rechteckigen Trommeln der Seitenlängen a und b aufmarschieren. Wir fragen uns: Wie schwingt denn solch eine Membran?

(a) Vorbereitung. Wir machen wieder einen Separationsansatz (welchen?) in der 2D-Wellengleichung, bestimmen aber zunächst nur die Eigenfrequenzen ω.

(b) Welche Randbedingungen haben wir bei fest eingespannter Membran für die Schwingung der Trommel? Nun lösen wir die Wellengleichung und beachten, dass beliebige Moden (=Anzahl der Schwingungsbäuche) auftauchen können in x- und y-Richtung (gekennzeichnet durch Modenzahlen m und n). Welche Eigenfrequenzen und somit Eigenmoden erhält man, $\omega(m,n) = ?$ Wie lässt sich die Mode $(m,n) = (3,2)$ veranschaulichen?