Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 5

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **23.05.2008**

[P10] <u>*Trickserei mit Operatoren*</u>

Für **[P11]** müssen wir eine kleine Vorübung mit Operatoren machen. Und zwar lösen wir dazu Eigenwertprobleme der Form

$$O(x)\ E(x) = \lambda(x) E(x)$$

durch Bestimmung des Eigenwertes $\lambda(x)$ der Eigenfunktion $E(x)$ eines Operators $O(x)$. Dieses Verfahren wird auch ein Schlüssel bei den Green'schen Funktionen sein (nächste PÜ). Man bestimme also

$$\frac{1}{2+\partial_x}\cosh(x) = ? \qquad e^{-\alpha x^2 \partial_x^2} x^3 = ? \qquad e^{tD\Delta}\frac{\cos(2kr)}{r} = ? \qquad e^{-\vec{r}'\cdot\nabla}\frac{1}{r} = ?$$

[P11] <u>*Diffusionsgleichung*</u>

Die Diffusionsgleichung war laut Vorlesung gegeben durch

$$(\partial_t - k\Delta)\, y(\vec{r}, t) = 0$$

Wir wollen sie einmal physikalisch beleuchten. Sei $n(\vec{r}, t)$ ein Teilchenfeld, welches einen Teilchenstrom $\vec{\jmath} = -D\nabla n$ verursacht, D heißt Diffusionskonstante. Dieser Teilchenstrom (z.B. Durchfluss durch ein Rohr) erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{n} + \nabla\vec{\jmath} = 0$$

(sofern das Rohr nicht leckt). Landläufig auch bekannt als "was reingeht, kommt auch wieder raus".

(a) Wie folgt hieraus die Diffusionsgleichung? Oftmals ist ein Anfangswert $n(\vec{r}, 0)$ gegeben, wodurch die partielle DGL eindeutig lösbar wird. Man entwickle hierzu $n(\vec{r}, t)$ und bestimme die formale Lösung $n(\vec{r}, t) = \ldots \cdot n(\vec{r}, 0)$

(b) Eine Teilchenstrom sei gegeben durch $n(x, 0) = n_1 - n_0\cos(kx)$. $n(x, t) = ?$ Wie sieht die Langzeitprognose aus?

[P12] <u>*Wellengleichung*</u>

Die zweite wichtige partielle DGL ist die homogene Wellengleichung (homogen: rechte Seite = 0):

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y(\vec{r}, t) =: \Box y(\vec{r}, t) = 0$$

(a) Die Kombination

$$f(x - ct) + g(x + ct) =: \phi(x, t)$$

von zwei willkürlichen Funktionen f und g ist eine allgemeine Lösung der 1D-Wellengleichung. Zeigen!

(b) Welche Beziehung für k und ω und ergibt sich für $y(\vec{x}, t) = A\cos(\vec{k}\vec{x} + \omega t)$ aus der Wellengleichung?

(c) Wie sieht die allgemeine radialsymmetrische Lösung in Kugelkoordinaten aus?

(d) Nach einer Explosion bei $x = 0$ in einem langen geraden U-Bahn-Tunnel (x-Achse) mögen zur Zeit $t = 0$ folgende Verhältnisse für die Luft-Teilchendichte vorliegen:

$$n(x, 0) = n_0 + n_1 \cdot e^{-\alpha x^2}, \quad \dot{n}(x, 0) = 0$$

Wie es nun weitergeht, erzählt $n(x, t) = ?$