RdP II SS 08

7&8 Apr. 2008

I. Krummlinige Koordinaten:

1. Motivation: Kartesische Koordinaten erscheinen uns natürlich, sind aber oft sehr unpraktisch. Denn:

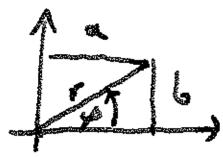
1.) phänomenologisch bekannte Bewegungen (z.B. kreisförmige Planetenbahn) sehr schwierig anzugeben

2.) Symmetrie eines Problems wird nicht ausgenutzt! (z.B. Zentralpotential einer Masse (Planet) oder Ladung (pkt.-förmig) ist kugelsymmetrisch, Fluß durch Röhre ist axialsymmetrisch.

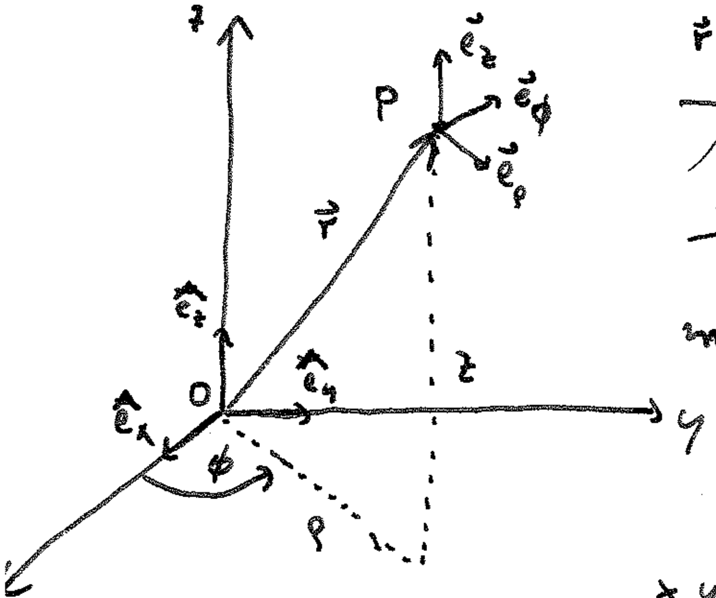
=) Geeignetere Koord.-Systeme.

Beispiele: Längen- & Breitengrade für Ortsangabe auf Kugeloberfläche, Polarkoordinaten der komplexen Zahlen

$$z = a + ib = re^{i\varphi}, \quad r = +\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\tan\varphi = b/a.$$



2. Zylinder-Koordinaten:



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \quad \text{in kart. Koord.}$$

$$\text{mit } \begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$x, y, z \in (-\infty, +\infty)$

$\rho \geq 0, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, +\infty)$

$\rho \in [0, +\infty)$

$$\vec{r} = \rho\cos\phi\,\hat{e}_x + \rho\sin\phi\,\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

Variation mit ρ, ϕ, z:

$$\vec{e}_\rho\,' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\, \hat{e}_x + \sin\phi\, \hat{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi\,' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin\phi\, \hat{e}_x + \rho\cos\phi\, \hat{e}_y$$

$$\vec{e}_z\,' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{e}_z$$

Achtung: Zwar sind diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$,
zwar stehen sie orthogonal aufeinander,
aber sie haben nicht alle die Länge 1, sind also nicht
alle Einheitsvektoren.

Genauer: $\vec{e}_z\,' = \hat{e}_z$

$\vec{e}_\rho\,' = \hat{e}_\rho$ aber

$\vec{e}_\phi\,' = \rho\, \hat{e}_\phi$.

Beachte: $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ und $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z\}$ sind <u>Triaden</u>, also
VONS für $\mathbb{R}^3$,
aber für $\vec{r}(t)$ Trajektorie sind $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$
konstant, $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z\}$ ändern sich für jeden Punkt
P der Trajektorie $\vec{r}(t)$.

Erinnerung: $\vec{r} = \vec{r}(u_1, \dots, u_n)$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_n} du_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} du_j$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz$$

$$= \vec{e}_\rho\,' d\rho + \vec{e}_\phi\,' d\phi + \vec{e}_z\,' dz$$

$$= d\rho\, \hat{e}_\rho + \rho\, d\phi\, \hat{e}_\phi + dz\, \hat{e}_z. \quad (\text{vgl. } dx\, \hat{e}_x + dy\, \hat{e}_y + dz\, \hat{e}_z)$$

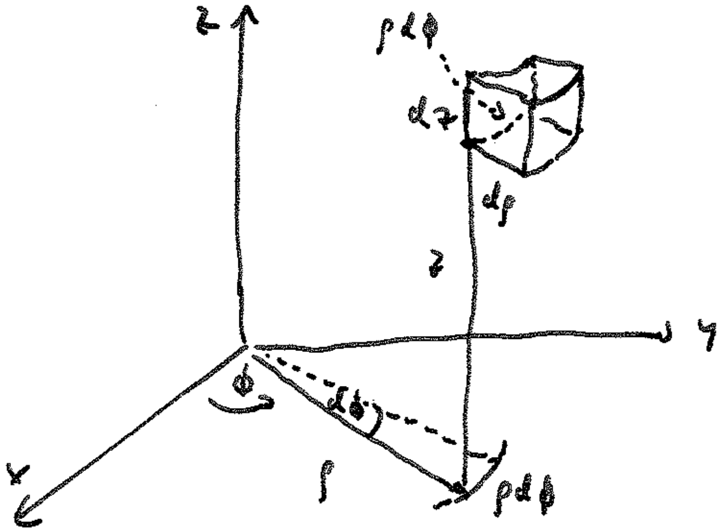
Dies zeigt einen wichtigen Unterschied zwischen kartesischen und allgemeinen
Koordinaten-Systemen: Distanz $ds = dx$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+dx \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (also
y, z festgehalten) aber $ds = \rho\, d\phi$ für ρ, z festgehalten, <u>nicht</u> $d\phi$.
!↑!

$\boxed{\text{Skalen-Faktor}}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2$$

da die Basisvektoren $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\phi$ und $\hat{e}_z$ orthonormal sind.

Volumenelement:



Spatprodukt

$$dV = \left| d\rho\, \hat{e}_\rho \cdot \left(\rho\, d\phi\, \hat{e}_\phi \times dz\, \hat{e}_z \right) \right|$$

$$= \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

Vektoroperatoren: Skalares Feld $\Phi(\rho, \phi, z)$

Vektorfeld $\vec{A}(\rho, \phi, z) = A_\rho \hat{e}_\rho + A_\phi \hat{e}_\phi + A_z \hat{e}_z$.

$$\Rightarrow \nabla \Phi = \text{grad}\, \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{e}_z$$

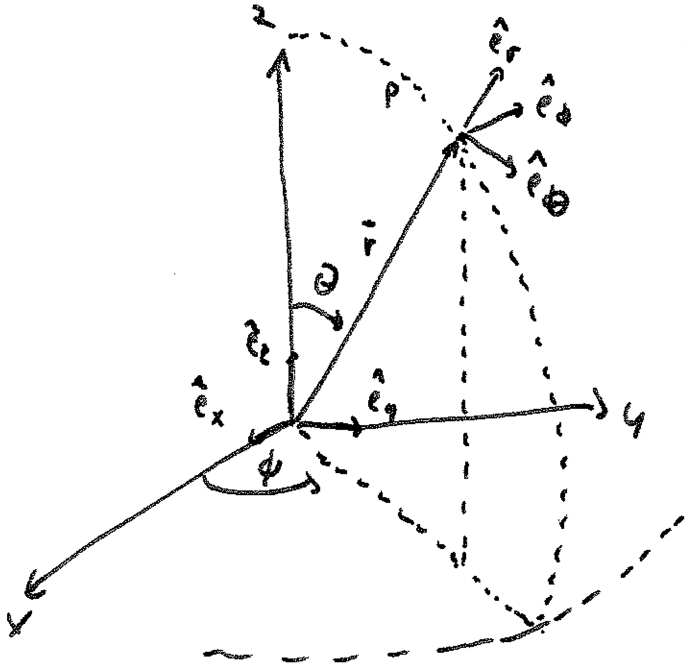
$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div}\, \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\nabla \times \vec{A} = \text{rot}\, \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Herleitung später.

3. Kugelkoord. / Sphärische Koord.



$$x = r \sin\Theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\Theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\Theta$$

$$r \geq 0$$
$$0 \leq \phi < 2\pi$$
$$0 \leq \Theta < \pi \quad (!)$$

$$\vec{r} = r \sin\Theta \cos\phi \, \hat{e}_x + r \sin\Theta \sin\phi \, \hat{e}_y + r \cos\Theta \, \hat{e}_z$$

$$\vec{e}\,'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \qquad u \in \{r, \Theta, \phi\} \; \ldots$$

$$\hat{e}_u = \frac{\vec{e}\,'_u}{|\vec{e}\,'_u|} :$$

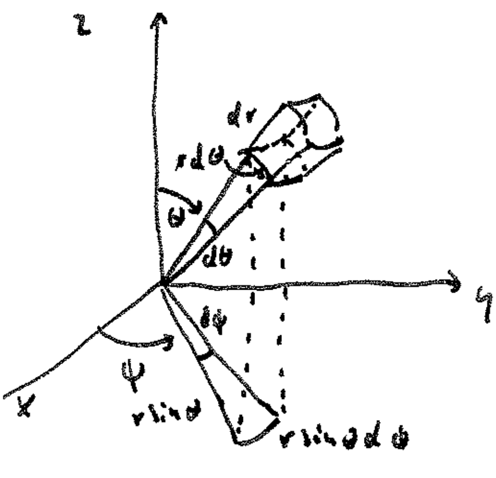
$$\hat{e}_r = \sin\Theta \cos\phi \, \hat{e}_x + \sin\Theta \sin\phi \, \hat{e}_y + \cos\Theta \, \hat{e}_z$$
$$\hat{e}_\Theta = \cos\Theta \cos\phi \, \hat{e}_x + \cos\Theta \sin\phi \, \hat{e}_y - \sin\Theta \, \hat{e}_z$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi \, \hat{e}_x + \cos\phi \, \hat{e}_y \quad , \quad \text{VONS}$$

$$d\vec{r} = dr \, \hat{e}_r + r \, d\Theta \, \hat{e}_\Theta + r \sin\Theta \, d\phi \, \hat{e}_\phi$$

Skalen Faktor

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dr)^2 + r^2 (d\Theta)^2 + r^2 \sin^2\Theta \, (d\phi)^2$$

$$dV = |dr \, \hat{e}_r \cdot (r \, d\Theta \, \hat{e}_\Theta \times r \sin\Theta \, d\phi \, \hat{e}_\phi)| = r^2 \sin\Theta \, dr \, d\Theta \, d\phi$$
$$= \cancel{r^2 \, d\cos\Theta}$$
$$= r^2 dr \, d(\cos\Theta) \, d\phi$$
$$= r^2 dr \underbrace{d\Omega}_{\text{Raumwinkel-Element}}$$



Vektoroperatoren: Skalares Feld $\Phi(r,\theta,\phi)$

Vektor-Feld $\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_\phi \hat{e}_\phi$.

$$\operatorname{grad} \Phi = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\hat{e}_\phi$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\,\hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\, A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\Phi = \Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \ldots$$

3. Allgemeine krummlinige Koord.s (dim = 3 der Einfachheit halber)

Punkt P. Kart. Koord.s (x, y, z)

Allg. krummlinige Koord. (u_1, u_2, u_3)

so daß $\left\{\begin{array}{l} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{array}\right\}$ und umgekehrt $\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_1(x, y, z) \\ u_2 = u_2(x, y, z) \\ u_3 = u_3(x, y, z) \end{array}\right\}$.

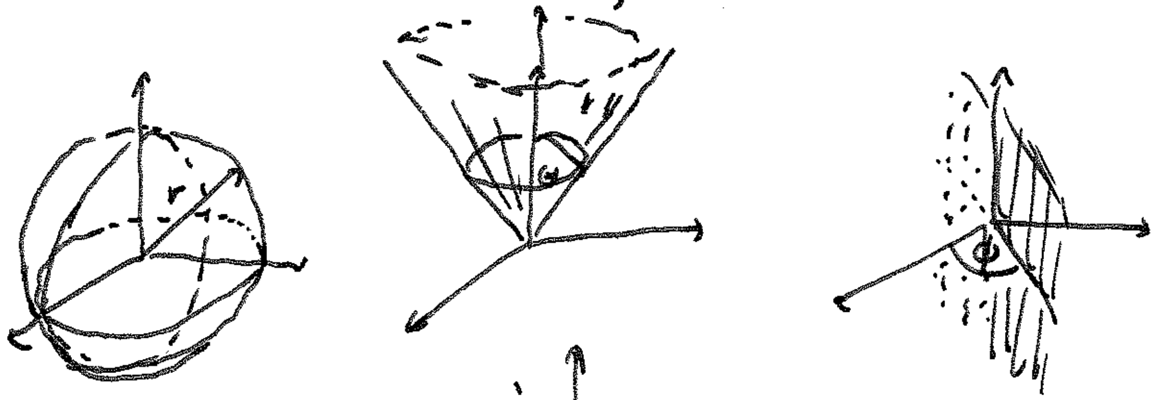
Die ~~Fktn~~ x, y, z, u_i seien alle stetig diffbar (unendlich oft ...) und möge "überall" eindeutige Umkehrabb. besitzen.

$\Rightarrow$ 1:1 Korrespondenz der Koord.-Systeme.

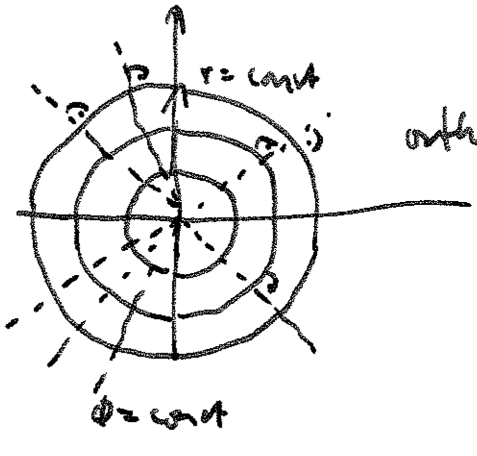
$u_i = c_i = \text{const}$: Koordinaten-(Ober)fläche, schneide sich in den Koordinaten-Kurve/Linien.

Wenn $\forall P$ sich die Koord.-fläche unter $90°$ schneiden dann heißt Koord. System orthogonal

Bsp: ~~Kugelsymm.~~ Koord. : $u_1 = r = R$ Sphäre, Kugeloberfläche
Sphärische Polar $u_2 = \theta = \Theta$ Kreisförmiger Kegel
$u_3 = \phi = \Phi$ Ebene



Bsp. Polarkoord:



orthogonal.

Polar
Sphär. Koord. } orthogonal ✓
Zyl. Koord.

Wir betrachten nun einen Punkt P mit seinem Ortsvektor $\vec{r}$. Da P durch $\{u_1, u_2, u_3\}$ parametrisiert wird, ist auch $\vec{r}$ durch $\{u_1, u_2, u_3\}$ parametrisiert, $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$

Zu jeder Koordinatenkurve $u_i \big|_{u_j, u_k = \text{const}}$

können wir einen Tangential vektor definieren, der in Richtung wachsender u_i's zeigt: $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$

Weiter definieren wir die Skalenfaktoren $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|$ für das Koord. System $\{u_1, u_2, u_3\}$ und damit die Einheitsvektoren

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} .$$

Bsp. Sphär. Polarkoord. $u_1 = r, \; u_2 = \theta, \; u_3 = \phi$

Koordinatenkurven: r: Linie durch Ursprung mit Winkeln θ, ϕ

θ: Längengrade } auf Kugeloberfläche mit Radius r

ϕ: Breitengrade }

Beachte: Das Längenelement für eine infinitesimale Änderung du_i in einer der Richtungen ist $h_i du_i$!!

Bsp: Sphär. Polarkoord: $h_r = 1, \; h_\theta = r, \; h_\phi = r \sin\theta$

Zylinder koord: $h_\rho = 1 \quad h_\phi = \rho \;, h_z = 1$

vollständiges orthonormales System

Wenn das Koord.-sys. orthogonal ist, so bilden die $\hat{e}_i$ ein VONS.

Allgemein finden wir für eine infinitesimale vektorielle Verschiebung $d\vec{r}$ des Vektors $\vec{r}$ von P:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= \vec{e}_1 du_1 + \vec{e}_2 du_2 + \vec{e}_3 du_3 \\ &= h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} h_i du_i \hat{e}_i \end{aligned}$$

Sei $\{u_i\}$ ein orthogonales Koord. System: $\Rightarrow$

Das Bogenlängenelement ist dann

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_1^2 (du_1)^2 + h_2^2 (du_2)^2 + h_3^2 (du_3)^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 (du_i)^2$$

Desweiteren ist das Volumenelement dann gegeben als

$$dV = |du_1 \vec{e}_1 \cdot (du_2 \vec{e}_2 \times du_3 \vec{e}_3)|$$
$$= |h_1 \hat{e}_1 \cdot (h_2 \hat{e}_2 \times h_3 \hat{e}_3)|\, du_1 du_2 du_3$$
$$= h_1 h_2 h_3\, du_1 du_2 du_3$$

Bis jetzt habe wir die Tangentialvektoren betrachtet. Diese waren entlang der Koord.-kurven definiert, $u_i|_{u_j, u_k = \text{const}}$.

Wir betrachten nun die Koordinatenfläche $u_i = \text{const}$ (u_j, u_k variieren frei)

Im Punkte P schneiden sich drei Koordinatenflächen. Jede hat im Punkte P einen <u>Normalen</u>vektor:

$$\vec{\varepsilon}_i = \nabla u_i \quad \text{und} \quad \hat{\varepsilon}_i = \frac{\nabla u_i}{|\nabla u_i|}.$$

Die Basen $\{\hat{e}_i\}$ und $\{\hat{\varepsilon}_i\}$ sind für orthogonale Koord.-systeme identisch.
Jeder ~~Vektor~~ kann in jeder dieser Basen entwickelt werden

$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i = \sum_i \alpha_i \hat{\varepsilon}_i$$
$$= \sum_i B_i \vec{e}_i = \sum_i \beta_i \vec{\varepsilon}_i$$
$$= \sum_i B_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \sum_i \beta_i \nabla u_i$$

Kontravariante

Kovariante Komponente von $\vec{A}$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{oft.} \quad \hat{\varepsilon}_i \equiv \hat{e}^i & \underline{\text{duale}} \\ \qquad \vec{\varepsilon}_i \equiv \vec{e}^i & \underline{\text{Basen}} \\ \vec{A} = A^i \hat{e}_i = A_i \hat{e}^i & \\ \qquad \text{Summenkonvention} & \end{array}}$$

Es gilt: $\vec{e}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$ bzw. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^{\,j}$.

Denn:
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \nabla u_j = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u_i}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u_i}\vec{e}_z\right) \cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u_j}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u_j}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$
$$= \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial z}$$

$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ist VONS

$$= \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij}$$

Kettenregel für partielle ~~Differ~~ Ableitungen: $f(u_1, \dots, u_n)$
$u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}.$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns nun auf orthogonale Koord. Systeme, und arbeiten mit der Basis $\{\hat{e}_i\}$ und $\{\hat{E}_i\}$, also den normierten Basen.

Gradient: Ein skalares Feld Φ ändert seinen Wert um $d\Phi$, wenn sich die Koordinaten um du_i ändern:

$$\Phi(u_1+du_1, u_2+du_2, u_3+du_3) = \Phi(u_1,u_2,u_3) + d\Phi(u_1,u_2,u_3)$$

mit $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} du_3$

Wir erinnern uns: $\vec{r} = \vec{r}(u_1,u_2,u_3)$ ist Ortsvektor für P

$$\vec{r}(u_1+du_1, u_2+du_2, u_3+du_3) = \vec{r} + d\vec{r}$$

$\Rightarrow d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{r} = \text{grad}\,\Phi \cdot d\vec{r}$.

mit $\nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \dots + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\hat{e}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\hat{e}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}}$$

7.8. Apr 2008

Mit $\Phi = u_k \Rightarrow \nabla u_k = \frac{1}{h_k}\hat{e}_k$, also $|\nabla u_k| = \frac{1}{h_k}$ und $\hat{e}_k = h_k \nabla u_k = \hat{E}_k$

Divergenz: $\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \hat{e}_i$ Vektorfeld in der Basis für Koord. System $\{u_i\}$.

Wir betrachten $\nabla\cdot(A_1\hat{e}_1)$ $\quad \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = h_2\nabla u_2 \times h_3 \nabla u_3$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(A_1\hat{e}_1) = \nabla\cdot(A_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3)$$

$$= \nabla(A_1 h_2 h_3)\cdot(\nabla u_2 \times \nabla u_3) + A_1 h_2 h_3 \underbrace{\nabla\cdot(\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{=0}$$

da $\nabla \times \nabla = 0$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(A_1\hat{e}_1) = \underbrace{\nabla(A_1 h_2 h_3)}_{\equiv \Phi}\left(\frac{\hat{e}_2}{h_2} \times \frac{\hat{e}_3}{h_3}\right) = \nabla(A_1 h_2 h_3)\frac{\hat{e}_1}{h_2 h_3}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(A_1\hat{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{A} = \text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

Laplace-Operator: $\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = \text{div grad}\, \Phi =$

$= \text{div}(\vec{A})$ mit $\vec{A} = \text{grad}\, \Phi$.

$$\Rightarrow \nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right]$$

Rotation: $\text{rot}\, \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$.

wir betrachten wieder nur $\nabla \times (A_1 \hat{e}_1)$ mit $\hat{e}_1 = h_1 \nabla u_1$

$$\Rightarrow \nabla \times (A_1 \hat{e}_1) = \nabla \times (A_1 h_1 \nabla u_1)$$

$$= \nabla (A_1 h_1) \times \nabla u_1 + A_1 h_1 \underbrace{\nabla \times \nabla u_1}_{=0}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (A_1 \hat{e}_1) = \nabla (\underbrace{A_1 h_1}_{=\Phi}) \times \frac{\hat{e}_1}{h_1}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (A_1 \hat{e}_1) = \frac{\hat{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\hat{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1)$$

$$\Rightarrow \text{rot}\, \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_1} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$