④ Kugelflächenfktn / Spherical Harmonics

Wir hatten bei Kugelkoord

$$\Theta(\theta)\,\Phi(\phi) = P_\ell^m(\cos\theta)\left(C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)\right)$$

mit $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $-\ell \le m \le \ell$, $m \in \mathbb{Z}$. [für Lsgn, die $\forall\, \theta, \phi$ regulär sind].

neue, bessere Basis:

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = (-)^m \underbrace{\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}}_{\text{Normierung}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

es gilt

$$Y_\ell^{-|m|}(\theta,\phi) = (-)^{|m|}\left[Y_\ell^{|m|}(\theta,\phi)\right]^* \leftarrow \text{komplexe Konjugation}$$

und insbesondere $\boxed{\text{VONS}}$

$$\langle \ell,m|\ell',m'\rangle = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left[Y_\ell^m(\theta,\phi)\right]^* Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\phi)\, d\phi\, d(\cos\theta) = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$$

Def. Bereich von $(\cos\theta)$

$-\sin\theta\, d\theta$, wird aber von $+1$ nach -1 integriert

"beliebige" Fkt $f(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}\, Y_\ell^m(\theta,\phi)$, $= \sum_\ell\sum_m a_{\ell m}|\ell,m\rangle$

$$a_{\ell m} = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left[Y_\ell^m(\theta,\phi)\right]^* f(\theta,\phi)\, d\phi\, d(\cos\theta) = \langle \ell,m|f\rangle$$

Die ersten paar lauten:

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad Y_2^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi} \qquad Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}$$

5 Helmholtz-Gleichung:

Zeitabhängigkeit nun wieder berücksichtigen.

Laplace-Gl → Wellen-Gl (1)

→ Diffusionsgl (2)

$$\Delta u = 0 \quad \to \quad \Delta u = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u \qquad (1)$$

$$\to \quad \kappa \Delta u = \partial_t u \qquad (2)$$

Trennung der Variablen $u(\vec{r},t) = F(\vec{r})\,T(t)$ mit Trennungskonstante k^2:

(1): $\Delta F + k^2 F = 0$, $\quad \partial_t^2 T + k^2 c^2 T = 0$

$\leadsto T(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$, $\omega = kc$

(2): $\Delta F + k^2 F = 0$, $\quad \partial_t T + k^2 \kappa T = 0$

$\leadsto T(t) = A e^{-k^2 \kappa t}$

Helmholtz-Gl.

$$(\Delta + k^2) F = 0$$

A Helmholtz-Gl. in 2 dim in Polarkoord:

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\,\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 + k^2\right] F = 0, \qquad F = P(\rho)\,\Phi(\phi)$$

Separationskonst. m^2

$$\boxed{P'' + \frac{1}{\rho}P' + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)P = 0, \quad \Big| \quad \Phi'' + m^2 \Phi = 0}$$

Umschreiben in Gl. in $\mu = k\rho$

→ Bessel-Gl. der Ordnung m

$P(\rho) = C J_m(k\rho) + D Y_m(k\rho)$

∞ an $k\rho = 0$, also $D = 0$ für Lsgn, die 0 im Def.-Gebiet haben.

$\Phi(\phi) = A\cos(m\phi) + B\sin(m\phi)$

wie zuvor

$$F(\rho,\phi) = \left[A\cos(m\phi) + B\sin(m\phi)\right]\left[C J_m(k\rho) + D Y_m(k\rho)\right]$$

Bsp: Kreisförmige Trommel-Membrane, Radius a:
Was sind die 4 Eigenschwingungen mit der kleinsten Frequenz, wenn die Haut am Rand fest eingefasst ist?

Lsg: $\Delta u = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u$ $\qquad c^2 = \frac{T}{\sigma}$, T = Spannung der Haut, σ = Masse pro Einheitsfläche.

$\dots\to$

$$u(\rho,\phi,t) = J_m(k\rho)\left(\tilde{A}\cos(m\phi) + \tilde{B}\sin(m\phi)\right)e^{\pm i\omega t}$$

$$\omega = kc.$$

Eindeutigkeit: $m \in \mathbb{Z}$.

Randbedingung: Haut bei $\rho = a$ eingespannt $\Rightarrow J_m(ka) = 0$

Wir brauchen also mal wieder die Nullstellen der $J_m(x)$.

$J_0(x) = 0$ für $x \simeq \underline{2.40}$, $\underline{5.52}$, 8.65, ...

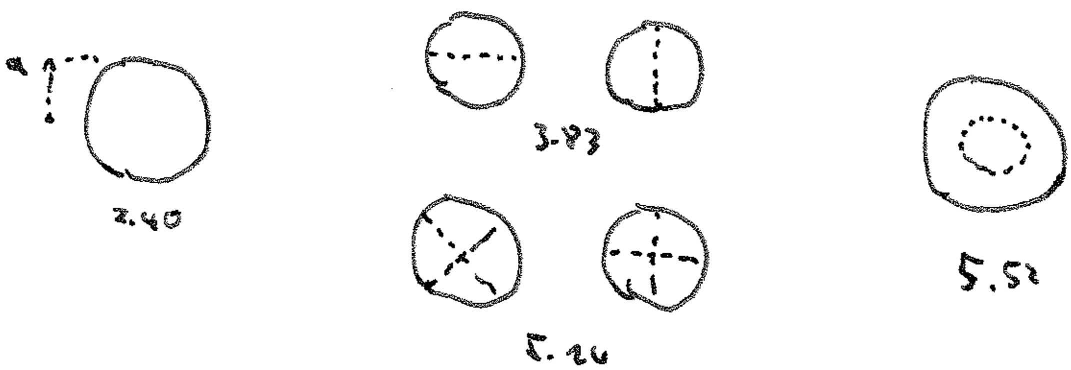
$J_1(x) = 0$ für $x \simeq \underline{3.83}$, 7.02, 10.17, ...

$J_2(x) = 0$ für $x \simeq \underline{5.14}$, 8.42, 11.62, ...

Frequenzen sind mit $k = \frac{x}{a}$, $\omega = kc = \frac{xc}{a}$ gegeben.

Niedrigste Frequenz ist $\omega \simeq 2.40\,\frac{c}{a}$.

$\omega = 2.40\,\frac{c}{a}$	$u \propto J_0(2.40\,\frac{\rho}{a})$	
$\omega = 3.83\,\frac{c}{a}$	$u \propto J_1(3.83\,\frac{\rho}{a})\cos\phi$,	$J_1(3.83\,\frac{\rho}{a})\sin\phi$
$\omega = 5.14\,\frac{c}{a}$	$u \propto J_2(5.14\,\frac{\rho}{a})\cos 2\phi$	$J_2(5.14\,\frac{\rho}{a})\sin 2\phi$
$\omega = 5.52\,\frac{c}{a}$	$u \propto J_0(5.52\,\frac{\rho}{a})$	



... = Knoten, wo $u = 0$ $\forall t$.

[B] Helmholtz-Gl. in 3 dim in Zylinderkoord.

Analog. Seien α, m die Separationskonstanten.

$$\Rightarrow F(\rho,\phi,z) = \left[A J_m\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\,\rho\right) + B Y_m\left(\sqrt{k^2-\alpha^2}\,\rho\right)\right]$$
$$\cdot \left[C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)\right]$$
$$\cdot \left[E e^{i\alpha z} + F e^{-i\alpha z}\right]$$

Verschiebung $k \to k' = \sqrt{k^2-\alpha^2}$

neuer Teil, für zusätzliche Abhängigkeit von z bewirkt

[C] dito, in Kugelkoord.

Winkelabhängigkeit wie gehabt: $\Theta(\theta)\,\Phi(\phi) \propto Y_\ell^m(\theta,\phi)$.

Radialgl.:

$$r^2 R'' + 2rR' + (\underbrace{k^2r^2}_{\text{neuer Term im Vergleich zur Laplace-Gl.}} - \ell(\ell+1))R = 0$$

Mit $R(r) = r^{-1/2} S(r) \Rightarrow$

$$r^2 S'' + rS' + \left(k^2r^2 - (\ell+\tfrac{1}{2})^2\right)S = 0$$

ergibt sich wieder für $\mu = kr$ eine Bessel-Gl. (der Ordnung $\ell+\frac{1}{2}$)

$$\Rightarrow F(r,\theta,\phi) = r^{-1/2}\left[A J_{\ell+1/2}(kr) + B Y_{\ell+1/2}(kr)\right]$$
$$\left.\begin{array}{l}\cdot \left[C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)\right] \\ \cdot \left[E P_\ell^m(\cos\theta) + F Q_\ell^m(\cos\theta)\right]\end{array}\right\} \propto Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

Bem: Sphärische Besselfktn $j_\ell(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\, J_{\ell+1/2}(\mu)$

sind trigonometr. Fktn in μ:

$$j_0(\mu) = \sin\mu, \quad j_1(\mu) = \frac{\sin\mu}{\mu} - \cos\mu \quad \text{etc.}$$

Analog $n_\ell(\mu) \propto r^{-1/2}\, Y_{\ell+1/2}(kr)$ sphärische Neumann-Fktn.

$$\Rightarrow F(r,\theta,\phi) = \left[\tilde{A}\, j_\ell(kr) + \tilde{B}\, n_\ell(kr)\right] Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

V.3 Superposition, Multipolentwicklung, ...

Lösung durch Hilfe des Eindeutigkeitssatzes.

Bsp $\Delta u = 0$ Laplace-Gl. in Kugelkoords.

Superposition
$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l^m(\cos\theta) \cdot \left(C_{lm} \cos(m\phi) + D_{lm} \sin(m\phi)\right) \quad (*)$$

eine allg. Lsg., die auf der Polarachse endlich ist.

- Randbed. liefere oder eliminiere einige der Konstanten A, B, C, D.
- Bestimme die verbleibenden Konstanten, indem man u für bestimmte Werte direkt berechnet, wo dies z.B. wegen Symmetrie leicht möglich ist, und dann den Eindeutigkeitssatz benutzt.

Also: Gravitationspotential eines gleichförmigen Ringes, Radius a, Gesamtmasse M, überall im Raum?

Polarachse $\perp$ Ringebene.

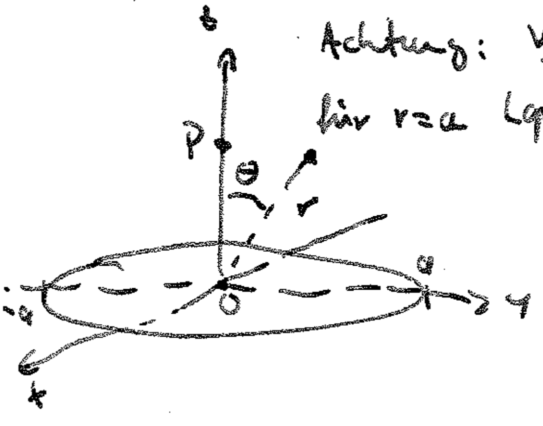
$$\Delta u(\vec{r}) = 0 \quad \forall\ \vec{r} \neq \left(r=a,\ \theta=\tfrac{\pi}{2}\right)$$

Überall außer auf dem Ring selbst gilt Laplace-Gl. und Lsg. hat Form (*)

$u(r,\theta,\phi) \to 0$ für $r \to \infty$

$|u(r,\theta,\phi)| < \infty$ für $r = 0$.

Achtung: Verschiedene Entwicklungen für $r>a$, $r<a$, da für $r=a$ Laplace-Gl. nicht gilt.



$r>a$: $\begin{cases} u \to 0 \text{ für } r \to \infty \\ m = 0 \text{ da System axialsymmetrisch ist} \end{cases}$

$$\Rightarrow u_>(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l^0(\cos\theta)$$

Berechne die B_l einfach dadurch, dass wir $u_>$ auf der Polarachse für $z>a$ direkt ausrechnen: (Punkt P mit alle Pkte des Ringes haben Abstand $\sqrt{z^2+a^2}$ von P

$$\Rightarrow \quad u_>(z,0,\phi) = \frac{G_N M}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{z^{\ell+1}}$$

$\left\{ \text{da } P_\ell^0(\cos\theta) = P_\ell(\cos\theta) \text{ und } P_\ell(1) = 1 \right.$

Entwickeln von $\frac{G_N M}{\sqrt{z^2+a^2}}$ für $z>a$ führt zu

$$u_>(z,0,\phi) = \frac{G_N M}{z}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{a}{z}\right)^4 - \dots\right]$$

und so $B_0 = G_N M$

$$B_{2\ell} = G_N M \frac{a^{2\ell}(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} \quad \text{für } \ell \geq 1$$

$$B_{2\ell+1} = 0$$

$\Rightarrow$ $u_>$ für $z>a$ auf z-Achse definiert, ist dort Lsg. des Randwertproblems. Eindeutigkeitstheorem $\Rightarrow$

$$u_>(r,\theta,\phi) = \frac{G_N M}{r}\left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta)\right]$$

$r<a$

$\left\{ \begin{array}{l} u(r=0,\theta,\phi) \text{ endlich,} \\ u \text{ axialsymmetrisch} \end{array} \right. \Rightarrow m=0$

$$u_<(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell^0(\cos\theta)$$

wieder gilt: $u_<(z,0,\phi) = \frac{G_N M}{\sqrt{z^2+a^2}} \overset{!}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell z^\ell$

nun aber entwickeln wir für $z<a$:

$$A_0 = \frac{G_N M}{a}, \quad A_{2\ell+1} = 0$$

$$A_{2\ell} = \frac{G_N M}{a^{2\ell+1}} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} \quad \Rightarrow$$

$$u_<(r,\theta,\phi) = \frac{G_N M}{a}\left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta)\right]$$

für $r=a$ fügen sich diese Lsgn stetig aneinander