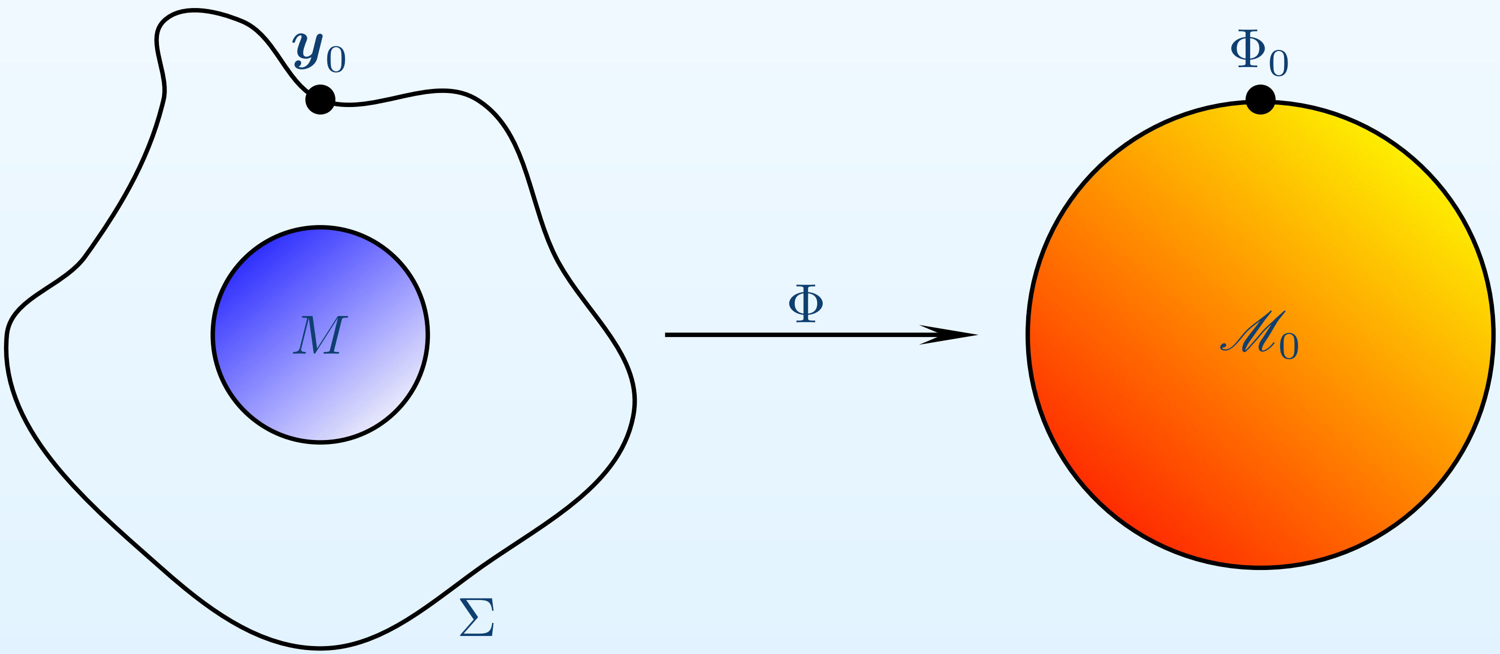
0.5 setgray0 0.5 setgray1

# Monopole

Nils Carqueville Uni Bonn



# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik

# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik
- Dirac-Monopol und Quantisierungsbedingung

# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik
- Dirac-Monopol und Quantisierungsbedingung
- Monopole in Eichfeldtheorien I: Georgi-Glashow-Modell

# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik
- Dirac-Monopol und Quantisierungsbedingung
- Monopole in Eichfeldtheorien I: Georgi-Glashow-Modell
  - ’t Hooft-Polyakov-Monopol

# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik
- Dirac-Monopol und Quantisierungsbedingung
- Monopole in Eichfeldtheorien I: Georgi-Glashow-Modell
  - ’t Hooft-Polyakov-Monopol
  - Bogomol’nyi-Schranke

# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik
- Dirac-Monopol und Quantisierungsbedingung
- Monopole in Eichfeldtheorien I: Georgi-Glashow-Modell
  - ’t Hooft-Polyakov-Monopol
  - Bogomol’nyi-Schranke
  - Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield-Monopol

# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik
- Dirac-Monopol und Quantisierungsbedingung
- Monopole in Eichfeldtheorien I: Georgi-Glashow-Modell
  - ’t Hooft-Polyakov-Monopol
  - Bogomol’nyi-Schranke
  - Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield-Monopol
- Homotopie

# Überblick

- (un)symmetrische Elektrodynamik
- Dirac-Monopol und Quantisierungsbedingung
- Monopole in Eichfeldtheorien I: Georgi-Glashow-Modell
  - ’t Hooft-Polyakov-Monopol
  - Bogomol’nyi-Schranke
  - Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield-Monopol
- Homotopie
- Monopole in Eichfeldtheorien II: allgemeine topologische Struktur

# Einleitung

# Unsymmetrische Elektrodynamik



Ohne störende Ströme $j$ sind freie Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \ , \quad \partial_\nu * F^{\mu\nu} = 0$$

invariant unter Dualitätstransformationen

$$F^{\mu\nu} \mapsto *F^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad *F^{\mu\nu} \mapsto -F^{\mu\nu} \ . \quad ☺$$

# Unsymmetrische Elektrodynamik



Ohne störende Ströme $j$ sind freie Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \,, \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0$$

invariant unter Dualitätstransformationen

$$F^{\mu\nu} \mapsto *F^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad *F^{\mu\nu} \mapsto -F^{\mu\nu} \,. \quad ☺$$

Allgemein sind sie es nicht,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \,, \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0 \,. \quad ☹$$

# Unsymmetrische Elektrodynamik

Ohne störende Ströme $j$ sind freie Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \ , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0$$

invariant unter Dualitätstransformationen

$$F^{\mu\nu} \mapsto *F^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad *F^{\mu\nu} \mapsto -F^{\mu\nu} \ . \quad ☺$$

Allgemein sind sie es nicht,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \ , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0 \ .$$

Magnetische Ladungen werden nicht beobachtet.

# Symmetrische Elektrodynamik



Mit magnetischen Strömen $k$ ist

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \ , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = -k^\mu \ .$$

symmetrisch unter erweiterten Dualitätstransformationen

$$F^{\mu\nu} \mapsto *F^{\mu\nu} \ , \qquad *F^{\mu\nu} \mapsto -F^{\mu\nu} \ ,$$

$$j^\mu \mapsto k^\mu \ , \qquad k^\mu \mapsto -j^\mu \ .$$

# Symmetrische Elektrodynamik

Mit magnetischen Strömen $k$ ist

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \ , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = -k^\mu \ .$$

symmetrisch unter erweiterten Dualitätstransformationen

$$F^{\mu\nu} \mapsto *F^{\mu\nu} \ , \qquad *F^{\mu\nu} \mapsto -F^{\mu\nu} \ ,$$
$$j^\mu \mapsto k^\mu \ , \qquad k^\mu \mapsto -j^\mu \ .$$

Wäre das nicht viel schöner?

# Symmetrische Elektrodynamik



Mit magnetischen Strömen $k$ ist

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \, , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = -k^\mu \, .$$

symmetrisch unter erweiterten Dualitätstransformationen

$$F^{\mu\nu} \mapsto *F^{\mu\nu} \, , \qquad *F^{\mu\nu} \mapsto -F^{\mu\nu} \, ,$$
$$j^\mu \mapsto k^\mu \, , \qquad k^\mu \mapsto -j^\mu \, .$$

Wäre das nicht viel schöner?

$\partial_\nu *F^{\mu\nu} \neq 0$ wegen $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ unmöglich für nicht-singuläres $A$...

# Dirac-Monopol



Für eine magnetische Punktladung $q_{\mathrm{m}}$ gilt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = q_{\mathrm{m}} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \; , \quad \text{und damit} \quad \boldsymbol{B} = \frac{q_{\mathrm{m}} \boldsymbol{x}}{4\pi r^3} \; .$$

# Dirac-Monopol



Für eine magnetische Punktladung $q_{\text{m}}$ gilt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = q_{\text{m}} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \ , \quad \text{und damit} \quad \boldsymbol{B} = \frac{q_{\text{m}} \boldsymbol{x}}{4\pi r^3} \ .$$

Ist $q_{\text{m}} \neq 0$, wird $\boldsymbol{B}$ *nicht* durch ein nicht-singuläres Vektorpotential beschrieben:

$$q_{\text{m}} = \oint_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_\Sigma (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \, \mathrm{d}^3 r = 0 \ ↯$$

# Dirac-Monopol

Für eine magnetische Punktladung $q_\mathrm{m}$ gilt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = q_\mathrm{m} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \ , \quad \text{und damit} \quad \boldsymbol{B} = \frac{q_\mathrm{m} \boldsymbol{x}}{4\pi r^3} \ .$$

Ist $q_\mathrm{m} \neq 0$, wird $\boldsymbol{B}$ *nicht* durch ein nicht-singuläres Vektorpotential beschrieben:

$$q_\mathrm{m} = \oint_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_\Sigma (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \, \mathrm{d}^3 r = 0 \ \lightning$$

Ein Ausweg ist der Dirac-String, ein Magnetfeld mit linienförmiger Singularität.

# Wu-Yang-Monopol

Die Vektorpotentiale

$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\ , \qquad \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

führen auf

$$\boldsymbol{B}_{\mathsf{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathsf{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}\boldsymbol{x}}{4\pi r^3} + q_{\mathsf{m}}\delta(x)\delta(y)\Theta(\mp z)$$

# Wu-Yang-Monopol



Die Vektorpotentiale

$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\varphi}\,, \quad \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\varphi}$$

führen auf

$$\boldsymbol{B}_{\mathsf{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathsf{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}\boldsymbol{x}}{4\pi r^3} + q_{\mathsf{m}}\delta(x)\delta(y)\Theta(\mp z)$$

magnetische Punktladung Dirac-String

# Wu-Yang-Monopol



Die Vektorpotentiale

$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\varphi}\,, \qquad \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\varphi}$$

führen auf

$$\boldsymbol{B}_{\mathsf{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathsf{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathsf{m}}\boldsymbol{x}}{4\pi r^3} + q_{\mathsf{m}}\delta(x)\delta(y)\Theta(\mp z)$$

Idee von Wu und Yang: Betrachte $\boldsymbol{A}_{\mathsf{N,S}}$ nur in nördlicher bzw. südlicher Hemisphäre.

# Wu-Yang-Monopol



Die Vektorpotentiale

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathrm{m}}(1-\cos\theta)}{4\pi r \sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\ , \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathrm{m}}(1+\cos\theta)}{4\pi r \sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

führen auf

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathrm{N,S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{x}}{4\pi r^3} + q_{\mathrm{m}}\delta(x)\delta(y)\Theta(\mp z)$$

Idee von Wu und Yang: Betrachte $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N,S}}$ nur in nördlicher bzw. südlicher Hemisphäre.

Sie sind durch eine *singuläre* Eichtransformation verbunden,

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) = \frac{2q_{\mathrm{m}}}{4\pi r \sin\theta}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\varphi}} = \nabla\left(\frac{2q_{\mathrm{m}}\varphi}{4\pi}\right) .$$

# Wu-Yang-Monopol

$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\left(\frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi}\right)$$

# Wu-Yang-Monopol



$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla \left( \frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi} \right)$$

$$q_{\mathsf{m}} = \oint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

# Wu-Yang-Monopol

$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla \left( \frac{2 q_{\mathsf{m}} \varphi}{4\pi} \right)$$

$$\begin{aligned} q_{\mathsf{m}} &= \oint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_{H_{\mathsf{N}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{H_{\mathsf{S}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

# Wu-Yang-Monopol



$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\left(\frac{2q_{\mathrm{m}}\varphi}{4\pi}\right)$$

$$\begin{aligned} q_{\mathrm{m}} &= \oint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_{H_{\mathrm{N}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{H_{\mathrm{S}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oint (\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \end{aligned}$$

# Wu-Yang-Monopol



$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\left(\frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi}\right)$$

$$\begin{aligned} q_{\mathsf{m}} &= \oint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_{H_{\mathsf{N}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{H_{\mathsf{S}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oint (\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}} - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint \nabla\left(\frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \end{aligned}$$

# Wu-Yang-Monopol

$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla \left( \frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi} \right)$$

$$\begin{aligned} q_{\mathsf{m}} &= \oint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_{H_{\mathsf{N}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{H_{\mathsf{S}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oint (\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}} - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint \nabla \left( \frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= \int \frac{1}{r \sin\theta} \frac{2q_{\mathsf{m}}}{4\pi} r \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

# Wu-Yang-Monopol



$$\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\left(\frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi}\right)$$

$$\begin{aligned}
q_{\mathsf{m}} &= \oint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \int_{H_{\mathsf{N}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{N}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{H_{\mathsf{S}}} (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \oint (\boldsymbol{A}_{\mathsf{N}} - \boldsymbol{A}_{\mathsf{S}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\
&= \oint \nabla\left(\frac{2q_{\mathsf{m}}\varphi}{4\pi}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\
&= \int \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{2q_{\mathsf{m}}}{4\pi}\, r\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= q_{\mathsf{m}} \quad ☺
\end{aligned}$$

# Dirac-Quantisierungsbedingung



Der Zustandsvektor $\psi$ eines Elektrons im Feld eines (schweren) magnetischen Monopols entwickelt sich nach der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = \frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}\right)^2 \psi$$

und ändert sich unter Eichtransformationen $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ wie $\psi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\chi}\psi$.

# Dirac-Quantisierungsbedingung



Der Zustandsvektor $\psi$ eines Elektrons im Feld eines (schweren) magnetischen Monopols entwickelt sich nach der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = \frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}\right)^2 \psi$$

und ändert sich unter Eichtransformationen $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ wie $\psi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\chi}\psi$. Mit $\chi = -2q_{\mathrm{m}}\varphi/(4\pi)$ gilt

$$\psi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}eq_{\mathrm{m}}\varphi/(4\pi)}\psi_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x}) \ ,$$

und Eindeutigkeit entlang des Äquators führt auf die

**Dirac-Quantisierungsbedingung** $\quad \dfrac{eq_{\mathrm{m}}}{4\pi} = \dfrac{n}{2} \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ .$

# Mit anderen Worten. . .

Konstruiert wurde ein $U(1)$-Hauptfaserbündel mit Basismannigfaltigkeit $S^2$ und lokalen Schnitten $\psi$.

# Mit anderen Worten. . .

Konstruiert wurde ein $U(1)$-Hauptfaserbündel mit Basismannigfaltigkeit $S^2$ und lokalen Schnitten $\psi$.

Der Atlas von $S^2$ besteht aus mindestens *zwei* Karten $U_{\mathrm{N}}, U_{\mathrm{S}}$, also ist die Zusammenhangsform $A$ nur lokal gegeben.

# Mit anderen Worten...



Konstruiert wurde ein $U(1)$-Hauptfaserbündel mit Basismannigfaltigkeit $S^2$ und lokalen Schnitten $\psi$.

Der Atlas von $S^2$ besteht aus mindestens *zwei* Karten $U_\text{N}, U_\text{S}$, also ist die Zusammenhangsform $A$ nur lokal gegeben.

Eichtransformationen entsprechen der Strukturgruppenwirkung von rechts auf das Hauptfaserbündel.

# Mit anderen Worten...



Konstruiert wurde ein $U(1)$-Hauptfaserbündel mit Basismannigfaltigkeit $S^2$ und lokalen Schnitten $\psi$.

Der Atlas von $S^2$ besteht aus mindestens *zwei* Karten $U_\mathrm{N}, U_\mathrm{S}$, also ist die Zusammenhangsform $A$ nur lokal gegeben.

Eichtransformationen entsprechen der Strukturgruppenwirkung von rechts auf das Hauptfaserbündel.

Die Übergangsfunktionen am Äquator gehören zu Klassen der Homotopiegruppe $\pi_1(U(1)) \cong \mathbb{Z}$, was der Quantisierung entspricht.

# Mit anderen Worten...



Konstruiert wurde ein $U(1)$-Hauptfaserbündel mit Basismannigfaltigkeit $S^2$ und lokalen Schnitten $\psi$.

Der Atlas von $S^2$ besteht aus mindestens *zwei* Karten $U_{\mathrm{N}}, U_{\mathrm{S}}$, also ist die Zusammenhangsform $A$ nur lokal gegeben.

Eichtransformationen entsprechen der Strukturgruppen-wirkung von rechts auf das Hauptfaserbündel.

Die Übergangsfunktionen am Äquator gehören zu Klassen der Homotopiegruppe $\pi_1(U(1)) \cong \mathbb{Z}$, was der Quantisierung entspricht.

(Allgemeinere Eichfeldtheorien können analog beschrieben werden.)

# Monopole in Eichfeldtheorien I

# Georgi-Glashow-Modell

Das Georgi-Glashow-Modell ist eine (konforme!) Eichfeldtheorie mit Strukturgruppe $G = SO(3)$:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathscr{D}^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \mathscr{D}_\mu \boldsymbol{\phi} - V(\boldsymbol{\phi})$$

mit

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu - e\varepsilon_{abc} W_b^\mu W_c^\nu \, ,$$

$$(\mathscr{D}^\mu \boldsymbol{\phi})_a = \partial^\mu \phi_a - e\varepsilon_{abc} W_b^\mu \phi_c \, ,$$

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\lambda}{4} \left( \boldsymbol{\phi}^2 - \langle \phi \rangle^2 \right)^2 \, .$$

# Georgi-Glashow-Modell

Das Georgi-Glashow-Modell ist eine (konforme!) Eichfeldtheorie mit Strukturgruppe $G = SO(3)$:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathscr{D}^\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \mathscr{D}_\mu \boldsymbol{\phi} - V(\boldsymbol{\phi})$$

mit

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu - e\varepsilon_{abc} W_b^\mu W_c^\nu \,,$$

$$(\mathscr{D}^\mu \boldsymbol{\phi})_a = \partial^\mu \phi_a - e\varepsilon_{abc} W_b^\mu \phi_c \,,$$

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\lambda}{4} \left( \boldsymbol{\phi}^2 - \langle \phi \rangle^2 \right)^2 \,.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$(\mathscr{D}_\nu G^{\mu\nu})_a = -e\varepsilon_{abc} \phi_b (\mathscr{D}^\mu \boldsymbol{\phi})_c \,, \; (\mathscr{D}^\mu \mathscr{D}_\mu \boldsymbol{\phi})_a = -\lambda \phi_a \left( \boldsymbol{\phi}^2 - \langle \phi \rangle^2 \right) .$$

# Vakua



Mit $G_a^{0i} \stackrel{\text{def}}{=} -\mathscr{E}_a^i$ und $G_a^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon_{ijk}\mathscr{B}_a^k$ gilt für die Energiedichte

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi})_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] + V(\boldsymbol{\phi}) \geq 0 \; .$$

# Vakua

Mit $G_a^{0i} \stackrel{\text{def}}{=} -\mathscr{E}_a^i$ und $G_a^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon_{ijk}\mathscr{B}_a^k$ gilt für die Energiedichte

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi})_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] + V(\boldsymbol{\phi}) \geq 0 \,.$$

Für Lösungen mit $T_{00} = 0$ ist notwendig und hinreichend das

Vakuum : $\quad G_a^{\mu\nu} = 0\,, \quad (\mathscr{D}^\mu\boldsymbol{\phi})_a = 0\,, \quad V(\boldsymbol{\phi}) = 0$

# Vakua

Mit $G_a^{0i} \stackrel{\text{def}}{=} -\mathscr{E}_a^i$ und $G_a^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon_{ijk}\mathscr{B}_a^k$ gilt für die Energiedichte

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi})_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] + V(\boldsymbol{\phi}) \geq 0 \ .$$

Für Lösungen mit $T_{00} = 0$ ist notwendig und hinreichend das

Vakuum : $G_a^{\mu\nu} = 0 \ , \quad (\mathscr{D}^\mu\boldsymbol{\phi})_a = 0 \ , \quad V(\boldsymbol{\phi}) = 0$

Wird gelöst durch

$$\left[\phi_a = \langle\phi\rangle\delta_{a,3} \ , \ W_a^\mu = 0\right]_G \ .$$

# Vakua

Mit $G_a^{0i} \overset{\text{def}}{=} -\mathscr{E}_a^i$ und $G_a^{ij} \overset{\text{def}}{=} -\varepsilon_{ijk}\mathscr{B}_a^k$ gilt für die Energiedichte

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\phi)_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\phi)_a\right)^2\right] + V(\phi) \geq 0 \ .$$

Für Lösungen mit $T_{00} = 0$ ist notwendig und hinreichend das

Vakuum : $\quad G_a^{\mu\nu} = 0 \ , \quad (\mathscr{D}^\mu\phi)_a = 0 \ , \quad V(\phi) = 0$

Wird gelöst durch

$$[\phi_a = \langle\phi\rangle\delta_{a,3} \ , \ W_a^\mu = 0]_G \ .$$

Entscheidende Bedeutung hat das

Higgs-Vakuum : $\quad (\mathscr{D}^\mu\phi)_a = 0 \ , \quad V(\phi) = 0$

# Vakua



$V$ erfüllt die Bedingungen für spontane Symmetriebrechung:

(i) $V(\phi) = V(g\phi)$ für alle $g \in G$;

(ii) absolutes Minimum bei einem $\phi_0$;

(iii) es gibt ein $g \in G$ mit $g\phi_0 \neq \phi_0$.

# Vakua

$V$ erfüllt die Bedingungen für spontane Symmetriebrechung:

(i) $V(\phi) = V(g\phi)$ für alle $g \in G$;

(ii) absolutes Minimum bei einem $\phi_0$;

(iii) es gibt ein $g \in G$ mit $g\phi_0 \neq \phi_0$.

$G = SO(3)$ wird zur kleinen Gruppe $H = SO(2) \cong U(1)$ gebrochen – generiert durch $\frac{1}{\langle\phi\rangle}\phi_0^a T^a$ – der elektromagnetischen Symmetriegruppe.

# Lösungen endlicher Energie



$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\phi)_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\phi)_a\right)^2\right] + V(\phi)$$

# Lösungen endlicher Energie



$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\phi)_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\phi)_a\right)^2\right] + V(\phi)$$

Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen mit endlicher Energie müssen asymptotisch für $r \to \infty$ im

Higgs-Vakuum : $\left(\mathscr{D}^\mu\phi\right)_a = 0\,, \quad V(\phi) = 0$

sein.

# Lösungen endlicher Energie



$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi})_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] + V(\boldsymbol{\phi})$$

Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen mit endlicher Energie müssen asymptotisch für $r \to \infty$ im

Higgs-Vakuum : $\left(\mathscr{D}^\mu\boldsymbol{\phi}\right)_a = 0\,, \quad V(\boldsymbol{\phi}) = 0$

sein. Für Zustände niedrigster Energie erwartet man höchstmögliche Symmetrie, dies führt mit $\xi = \langle\phi\rangle er$ auf den Ansatz von 't Hooft und Polyakov:

$$\phi_a(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2}\,H(\xi)\,,\; W_a^i(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon_{aij}\,\frac{x^j}{er^2}\,[1-K(\xi)]\,,$$

$$W_a^0(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2}\,J(\xi)$$

# Lösungen endlicher Energie



$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi})_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] + V(\boldsymbol{\phi})$$

Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen mit endlicher Energie müssen asymptotisch für $r \to \infty$ im

Higgs-Vakuum : $\left(\mathscr{D}^\mu\boldsymbol{\phi}\right)_a = 0\,, \quad V(\boldsymbol{\phi}) = 0$

sein. Für Zustände niedrigster Energie erwartet man höchstmögliche Symmetrie, dies führt mit $\xi = \langle\phi\rangle er$ auf den Ansatz von 't Hooft und Polyakov:

$$\phi_a(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2}\,H(\xi)\,,\ W_a^i(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon_{aij}\,\frac{x^j}{er^2}\,[1 - K(\xi)]\,,$$

$$W_a^0(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2}\,J(\xi)$$ $J \neq 0$ ergibt Dyonen

# Lösungen endlicher Energie

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi})_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] + V(\boldsymbol{\phi})$$

Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen mit endlicher Energie müssen asymptotisch für $r \to \infty$ im

Higgs-Vakuum : $\left(\mathscr{D}^\mu\boldsymbol{\phi}\right)_a = 0\,, \quad V(\boldsymbol{\phi}) = 0$

sein. Für Zustände niedrigster Energie erwartet man höchstmögliche Symmetrie, dies führt mit $\xi = \langle\phi\rangle er$ auf den Ansatz von ’t Hooft und Polyakov:

$$\phi_a(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2}\,H(\xi),\; W_a^i(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon_{aij}\,\frac{x^j}{er^2}\,[1 - K(\xi)]\,,\; W_a^0(\boldsymbol{x}) = 0$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol

$$\phi_a(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2}\, H(\xi),\; W_a^i(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon_{aij}\, \frac{x^j}{er^2}\, [1 - K(\xi)]\,,\; W_a^0(\boldsymbol{x}) = 0$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol



$$\phi_a(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2} H(\xi), \; W_a^i(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon_{aij} \frac{x^j}{er^2} \left[1 - K(\xi)\right], \; W_a^0(\boldsymbol{x}) = 0$$

Dieser Ansatz führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\xi^2 \frac{\mathrm{d}^2 K}{\mathrm{d}\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1) \; ,$$

$$\xi^2 \frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2) \; .$$

# 't Hooft-Polyakov-Monopol

$$\phi_a(\boldsymbol{x}) = \frac{x^a}{er^2}\, H(\xi),\; W_a^i(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon_{aij}\,\frac{x^j}{er^2}\,[1 - K(\xi)]\,,\; W_a^0(\boldsymbol{x}) = 0$$

Dieser Ansatz führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\xi^2\,\frac{\mathrm{d}^2 K}{\mathrm{d}\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1)\;,$$

$$\xi^2\,\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2}\,H(H^2 - \xi^2)\;.$$

Regularität bei $\xi \to 0$ und Forderung nach endlicher Energie (Higgs-Vakuum für $\xi \to \infty$) ergeben Randbedingungen

$$K(\xi) - 1 \leq \mathscr{O}(\xi),\; H(\xi) \leq \mathscr{O}(\xi) \qquad \text{für } \xi \to 0\;,$$

$$K(\xi) \to 0,\; H(\xi) \sim \xi \qquad \text{für } \xi \to \infty\;.$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol



$$\xi^2 \, \ddot{K} = KH^2 + K(K^2 - 1)$$

$$\xi^2 \, \ddot{H} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2)$$

$$K(\xi) - 1 \leq \mathscr{O}(\xi), \; H(\xi) \leq \mathscr{O}(\xi) \qquad \text{für } \xi \to 0$$

$$K(\xi) \to 0, \; H(\xi) \sim \xi \qquad \text{für } \xi \to \infty$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol



$$\xi^2\,\ddot{K} = KH^2 + K(K^2-1)$$

$$\xi^2\,\ddot{H} = 2K^2H + \frac{\lambda}{e^2}\,H(H^2-\xi^2)$$

$$K(\xi)-1 \le \mathscr{O}(\xi),\; H(\xi) \le \mathscr{O}(\xi) \qquad \text{für } \xi \to 0$$

$$K(\xi) \to 0,\; H(\xi) \sim \xi \qquad \text{für } \xi \to \infty$$

z.B.

$$\frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \langle\phi\rangle^2\right)^2 = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{r^2}{e^2r^4}\,H^2 - \langle\phi\rangle^2\right)^2 \xrightarrow{r\to\infty} 0 \Rightarrow H(\xi) \sim \xi$$

# 't Hooft-Polyakov-Monopol

$$\xi^2\,\ddot{K} = KH^2 + K(K^2-1)$$

$$\xi^2\,\ddot{H} = 2K^2H + \frac{\lambda}{e^2}\,H(H^2-\xi^2)$$

$$K(\xi)-1 \leq \mathscr{O}(\xi),\ H(\xi) \leq \mathscr{O}(\xi) \qquad \text{für } \xi \to 0$$

$$K(\xi) \to 0,\ H(\xi) \sim \xi \qquad \text{für } \xi \to \infty$$

Lösung existiert, geschlossene Form aber nicht bekannt. Jedoch für *große Abstände* gilt wegen $\lim_{r\to\infty}\phi_a(r\boldsymbol{e_r}) = \langle\phi\rangle\boldsymbol{e_r}{}^a$, dass

$$G_a^{ij} \approx \frac{1}{er^4}\,\varepsilon_{ijk}x^a x^k \approx \frac{1}{\langle\phi\rangle er^3}\,\varepsilon_{ijk}x^k\phi_a\ .$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol

$$\xi^2\,\ddot{K} = KH^2 + K(K^2-1)$$

$$\xi^2\,\ddot{H} = 2K^2H + \frac{\lambda}{e^2}\,H(H^2-\xi^2)$$

$$K(\xi)-1 \le \mathscr{O}(\xi),\; H(\xi) \le \mathscr{O}(\xi) \qquad \text{für } \xi \to 0$$

$$K(\xi) \to 0,\; H(\xi) \sim \xi \qquad \text{für } \xi \to \infty$$

Lösung existiert, geschlossene Form aber nicht bekannt. Jedoch für *große Abstände* gilt wegen $\lim_{r\to\infty} \phi_a(r\boldsymbol{e_r}) = \langle\phi\rangle \boldsymbol{e_r}{}^a$, dass

$$G_a^{ij} \approx \frac{1}{er^4}\,\varepsilon_{ijk}x^a x^k \approx \frac{1}{\langle\phi\rangle er^3}\,\varepsilon_{ijk}x^k\phi_a \;.$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol

$$G_a^{ij} \approx \frac{1}{er^4}\,\varepsilon_{ijk}x^a x^k \approx \frac{1}{\langle\phi\rangle er^3}\varepsilon_{ijk}x^k\phi_a$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol

$$G_a^{ij} \approx \frac{1}{er^4}\,\varepsilon_{ijk}x^a x^k \approx \frac{1}{\langle\phi\rangle er^3}\varepsilon_{ijk}x^k\phi_a$$

Da der ungebrochene $U(1)$-Erzeuger $\frac{1}{\langle\phi\rangle}\phi_0^a T^a$ proportional zur elektrischen Ladung ist, gilt $F^{\mu\nu}_{\text{EM}} = \frac{1}{\langle\phi\rangle}\phi_0^a G_a^{\mu\nu}$ und somit

$$B^k = -\frac{x^k}{er^3} \qquad \text{für } r \to \infty\ .$$

# ’t Hooft-Polyakov-Monopol

$$G_a^{ij} \approx \frac{1}{er^4}\,\varepsilon_{ijk}x^a x^k \approx \frac{1}{\langle\phi\rangle er^3}\varepsilon_{ijk}x^k\phi_a$$

Da der ungebrochene $U(1)$-Erzeuger $\frac{1}{\langle\phi\rangle}\phi_0^a T^a$ proportional zur elektrischen Ladung ist, gilt $F_{\text{EM}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\langle\phi\rangle}\phi_0^a G_a^{\mu\nu}$ und somit

$$B^k = -\frac{x^k}{er^3} \qquad \text{für } r \to \infty \; .$$

Für große Abstände ergibt sich ein magnetisches Monopolfeld der Stärke

$$q_{\text{m}} = -\frac{4\pi}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e_{\text{min}}q_{\text{m}}}{4\pi} = -\frac{1}{2}\cdot 1 \; ,$$

die Dirac-Quantisierungsbedingung für $n = 1$.

# Größe des Monopols

$$\xi^2\,\ddot{K} = KH^2 + K(K^2-1)$$

$$\xi^2\,\ddot{H} = 2K^2H + \frac{\lambda}{e^2}\,H(H^2-\xi^2)$$

$$K(\xi) \to 0,\; H(\xi) \sim \xi \quad \text{für } \xi \to \infty$$

# Größe des Monopols



$$\xi^2 \, \ddot{K} = K H^2 + K(K^2 - 1)$$

$$\xi^2 \, \ddot{H} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} \, H(H^2 - \xi^2)$$

$$K(\xi) \to 0, \; H(\xi) \sim \xi \quad \text{für } \xi \to \infty$$

Für sehr große Abstände vereinfachen sich die Differentialgleichungen für $K$ und $H \overset{\text{def}}{=} h + \xi$ zu

$$\ddot{K} = K \quad \text{und} \quad \ddot{h} = \frac{2\lambda}{e^2} \, h \; .$$

# Größe des Monopols

$$\xi^2 \, \ddot{K} = K H^2 + K(K^2 - 1)$$

$$\xi^2 \, \ddot{H} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2)$$

$$K(\xi) \to 0, \; H(\xi) \sim \xi \quad \text{für } \xi \to \infty$$

Für sehr große Abstände vereinfachen sich die Differentialgleichungen für $K$ und $H \stackrel{\text{def}}{=} h + \xi$ zu

$$\ddot{K} = K \quad \text{und} \quad \ddot{h} = \frac{2\lambda}{e^2} h \, .$$

Also folgt

$$\left.\begin{aligned} K &\sim \mathrm{e}^{-\xi} = \mathrm{e}^{-\langle\phi\rangle e r} = \mathrm{e}^{-M_{W^\pm} r} \\ H - \xi &\sim \mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}\xi/e} = \mathrm{e}^{-M_\phi r} \end{aligned}\right\} \quad \text{für } r \to \infty \, .$$

# Größe des Monopols

$$\left.\begin{array}{l} K \sim \mathrm{e}^{-\xi} = \mathrm{e}^{-\langle\phi\rangle e r} = \mathrm{e}^{-M_{W^\pm} r} \\ H - \xi \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}\xi/e} = \mathrm{e}^{-M_\phi r} \end{array}\right\} \quad \text{für } r \longrightarrow \infty\,.$$

# Größe des Monopols

$$\left.\begin{aligned} K \sim \mathrm{e}^{-\xi} = \mathrm{e}^{-\langle\phi\rangle e r} = \mathrm{e}^{-M_{W^\pm} r} \\ H - \xi \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}\xi/e} = \mathrm{e}^{-M_\phi r} \end{aligned}\right. \quad \text{für } r \longrightarrow \infty \,.$$

Interpretation: Monopol hat endliche Größe, bestimmt durch Compton-Wellenlängen der schweren Eichbosonen und des Higgs-Feldes.

# Higgs-Vakuum



***Annahme***: Jede Konfiguration von Lösungen endlicher Energie soll dem Higgs-Vakuum

$$\mathscr{D}^\mu \boldsymbol{\phi} = \partial^\mu \boldsymbol{\phi} - e\boldsymbol{W}^\mu \times \boldsymbol{\phi} = 0\,, \quad \boldsymbol{\phi}^2 = \langle \phi \rangle^2 \qquad (*)$$

für große Abstände genügen, mit einer Abweichung von höchstens $\mathscr{O}(\mathrm{e}^{-r/R_0})$.

# Higgs-Vakuum

***Annahme***: Jede Konfiguration von Lösungen endlicher Energie soll dem Higgs-Vakuum

$$\mathscr{D}^\mu \boldsymbol{\phi} = \partial^\mu \boldsymbol{\phi} - e \boldsymbol{W}^\mu \times \boldsymbol{\phi} = 0 \, , \quad \boldsymbol{\phi}^2 = \langle \phi \rangle^2 \qquad (*)$$

für große Abstände genügen, mit einer Abweichung von höchstens $\mathscr{O}(\mathrm{e}^{-r/R_0})$.

Die allgemeine Form von $\boldsymbol{W}^\mu$ mit $(*)$ ist

$$\boldsymbol{W}^\mu = \frac{1}{\langle \phi \rangle^2 e} \, \boldsymbol{\phi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{\langle \phi \rangle} \, \boldsymbol{\phi} A^\mu$$

mit beliebigem $A^\mu$.

# Higgs-Vakuum

$$\boldsymbol{W}^\mu = \frac{1}{\langle \phi \rangle^2 e} \boldsymbol{\phi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{\langle \phi \rangle} \boldsymbol{\phi} A^\mu$$

# Higgs-Vakuum



$$\boldsymbol{W}^{\mu} = \frac{1}{\langle\phi\rangle^2 e}\,\boldsymbol{\phi}\times\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{\langle\phi\rangle}\,\boldsymbol{\phi}A^{\mu}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\boldsymbol{W}^{\nu} - \partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\mu} - e\boldsymbol{W}^{\mu}\times\boldsymbol{W}^{\nu} \\ &= \frac{1}{\langle\phi\rangle}\,\boldsymbol{\phi}\left[\frac{1}{\langle\phi\rangle^3 e}\,\boldsymbol{\phi}\cdot(\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}\times\partial^{\nu}\boldsymbol{\phi}) + \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}\right] \\ &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\langle\phi\rangle}\,\boldsymbol{\phi}\,F^{\mu\nu}_{\text{EM}}\end{aligned}$$

# Higgs-Vakuum

$$\boldsymbol{W}^{\mu} = \frac{1}{\langle\phi\rangle^2 e}\,\boldsymbol{\phi}\times\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{\langle\phi\rangle}\,\boldsymbol{\phi}A^{\mu}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\boldsymbol{W}^{\nu} - \partial^{\nu}\boldsymbol{W}^{\mu} - e\boldsymbol{W}^{\mu}\times\boldsymbol{W}^{\nu} \\ &= \frac{1}{\langle\phi\rangle}\,\boldsymbol{\phi}\left[\frac{1}{\langle\phi\rangle^3 e}\,\boldsymbol{\phi}\cdot(\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}\times\partial^{\nu}\boldsymbol{\phi}) + \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}\right] \\ &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\langle\phi\rangle}\,\boldsymbol{\phi}\,F^{\mu\nu}_{\text{EM}}\end{aligned}$$

$F^{\mu\nu}_{\text{EM}}$ ist der Feldstärketensor der Elektrodynamik, denn aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu}_{\text{EM}} = 0\,, \qquad \partial_{\nu}\,{*F}^{\mu\nu}_{\text{EM}} = 0\,,$$

und außerdem gilt in einer Eichung mit $\boldsymbol{\phi}\equiv\boldsymbol{\phi}_0$, dass $F^{\mu\nu}_{\text{EM}} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$.

# Magnetische Ladung und Topologie

$$F_{\mathsf{EM}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\langle\phi\rangle^3 e}\,\boldsymbol{\phi}\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{\phi}\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}) + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Also ist der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche $\Sigma$

$$g_\Sigma = \oint_\Sigma \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{1}{e\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i\ .$$

# Magnetische Ladung und Topologie

$$F^{\mu\nu}_{\text{EM}} = \frac{1}{\langle\phi\rangle^3 e}\,\boldsymbol{\phi}\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{\phi}\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}) + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Also ist der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche $\Sigma$

$$g_\Sigma = \oint_\Sigma \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{1}{e\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i\ .$$

Wie verhält sich $g_\Sigma$ unter $\boldsymbol{\phi}\mapsto\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}$?

# Magnetische Ladung und Topologie



$$F_{\text{EM}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\langle\phi\rangle^3 e}\,\boldsymbol{\phi}\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{\phi}\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}) + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Also ist der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche $\Sigma$

$$g_\Sigma = \oint_\Sigma \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{1}{e\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i\ .$$

Wie verhält sich $g_\Sigma$ unter $\boldsymbol{\phi}\mapsto\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}$?

Wegen $\boldsymbol{\phi}^2 = \langle\phi\rangle^2$ gilt $\boldsymbol{\phi}\cdot\delta\boldsymbol{\phi} = 0$ und $\boldsymbol{\phi}\cdot\partial^j\boldsymbol{\phi} = 0$, also

$$\begin{aligned}
\delta g_\Sigma &= \frac{1}{2e\langle\phi\rangle^3}\,\varepsilon_{ijk}\oint_\Sigma \delta\left[\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\right]\mathrm{d}S^i \\
&= \frac{3}{2e\langle\phi\rangle^3}\,\varepsilon_{ijk}\oint_\Sigma \delta\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

# Magnetische Ladung und Topologie

$\delta g_\Sigma = 0$, d.h. der magnetische Fluss ist unabhängig von Deformationen von $\phi$, welche durch die beschriebenen Transformationen generiert werden.

# Magnetische Ladung und Topologie

$\delta g_\Sigma = 0$, d.h. der magnetische Fluss ist unabhängig von Deformationen von $\phi$, welche durch die beschriebenen Transformationen generiert werden.

Insbesondere ist $g_\Sigma$ unabhängig von

(i) der Zeitentwicklung von $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$,

# Magnetische Ladung und Topologie



$\delta g_\Sigma = 0$, d.h. der magnetische Fluss ist unabhängig von Deformationen von $\phi$, welche durch die beschriebenen Transformationen generiert werden.

Insbesondere ist $g_\Sigma$ unabhängig von

(i) der Zeitentwicklung von $\phi = \phi(x, t)$,

(ii) stetigen Eichtransformationen von $\phi$,

# Magnetische Ladung und Topologie

$\delta g_\Sigma = 0$, d.h. der magnetische Fluss ist unabhängig von Deformationen von $\phi$, welche durch die beschriebenen Transformationen generiert werden.

Insbesondere ist $g_\Sigma$ unabhängig von

(i) der Zeitentwicklung von $\phi = \phi(x, t)$,

(ii) stetigen Eichtransformationen von $\phi$,

(iii) der Wahl der (großen) Fäche $\Sigma$.

# Magnetische Ladung und Topologie



$\delta g_\Sigma = 0$, d.h. der magnetische Fluss ist unabhängig von Deformationen von $\phi$, welche durch die beschriebenen Transformationen generiert werden.

Insbesondere ist $g_\Sigma$ unabhängig von

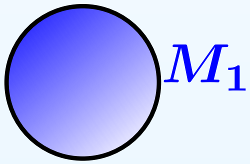
(i) der Zeitentwicklung von $\phi = \phi(x, t)$,

(ii) stetigen Eichtransformationen von $\phi$,

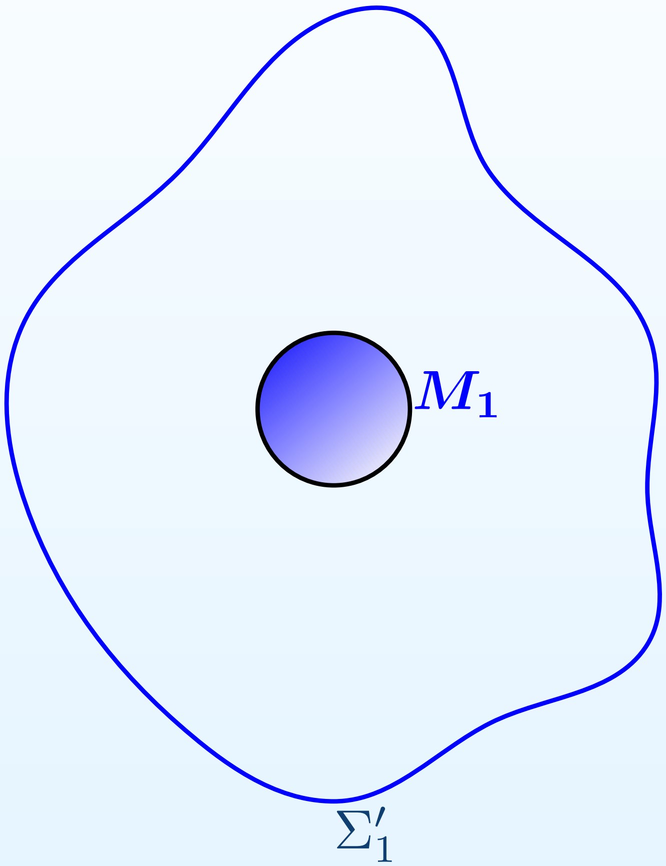
(iii) der Wahl der (großen) Fäche $\Sigma$.

Man spricht von einem „topologischen Erhaltungssatz“; die obigen Deformationen sind Beispiele für Homotopien.

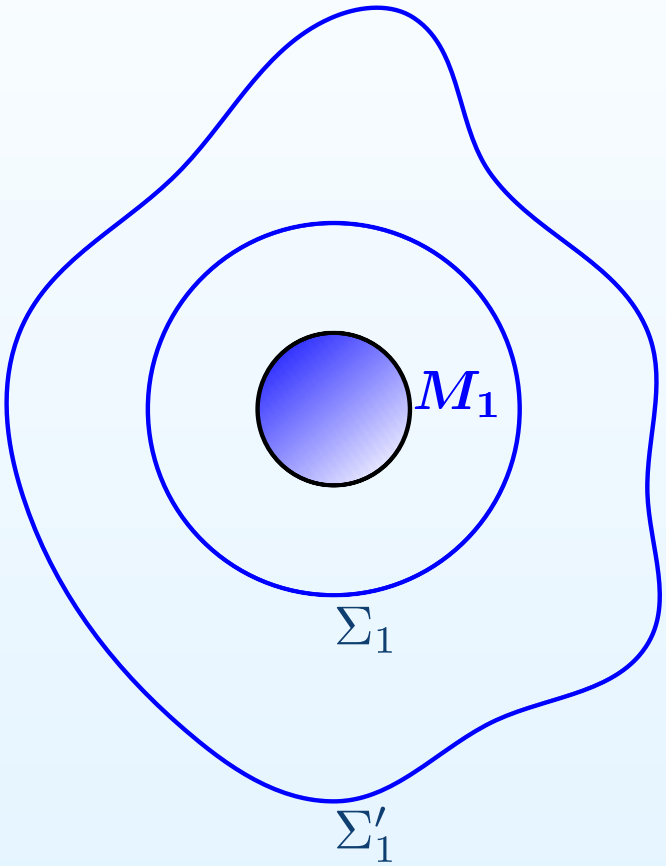
# Magnetische Ladung und Topologie



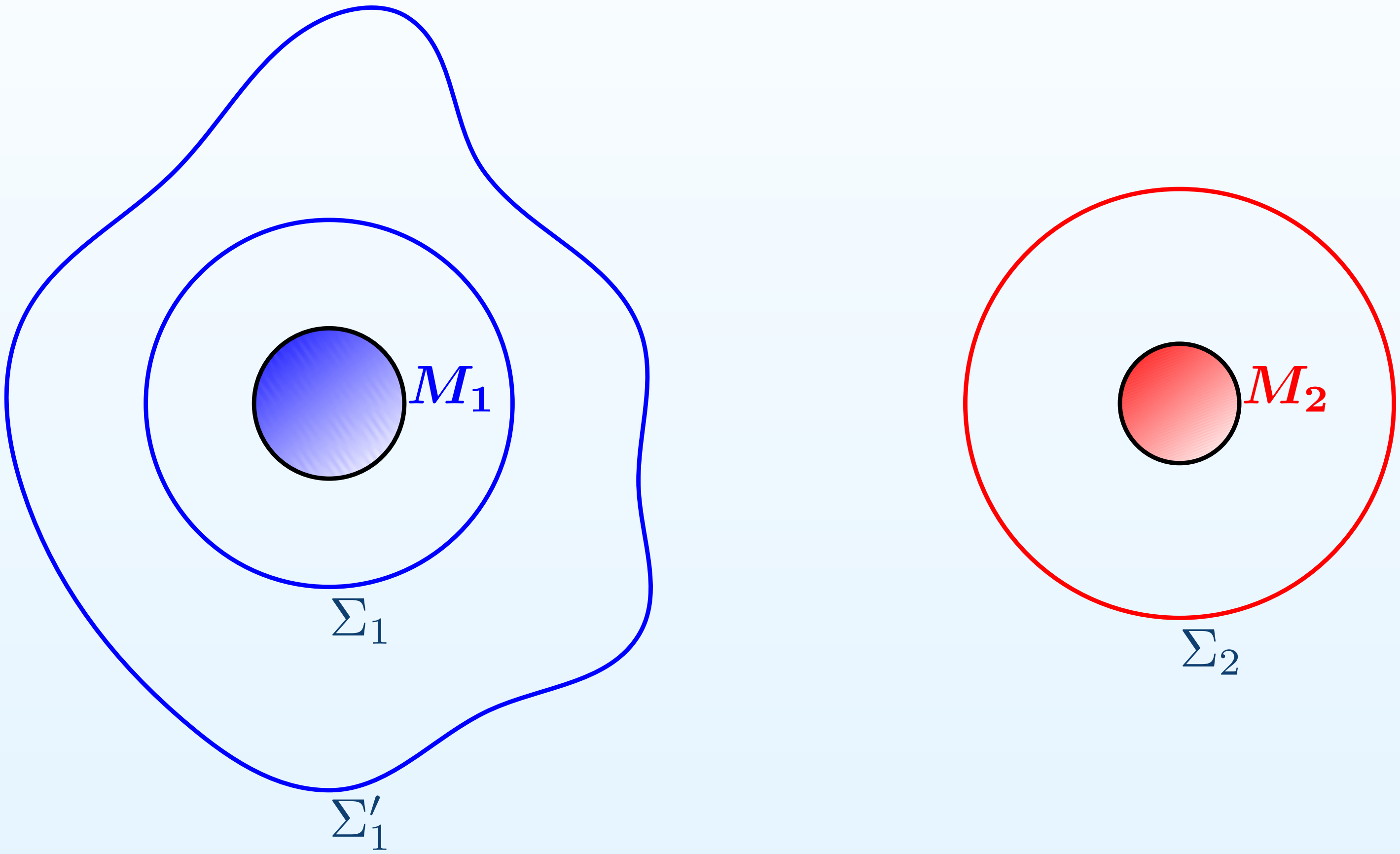
# Magnetische Ladung und Topologie



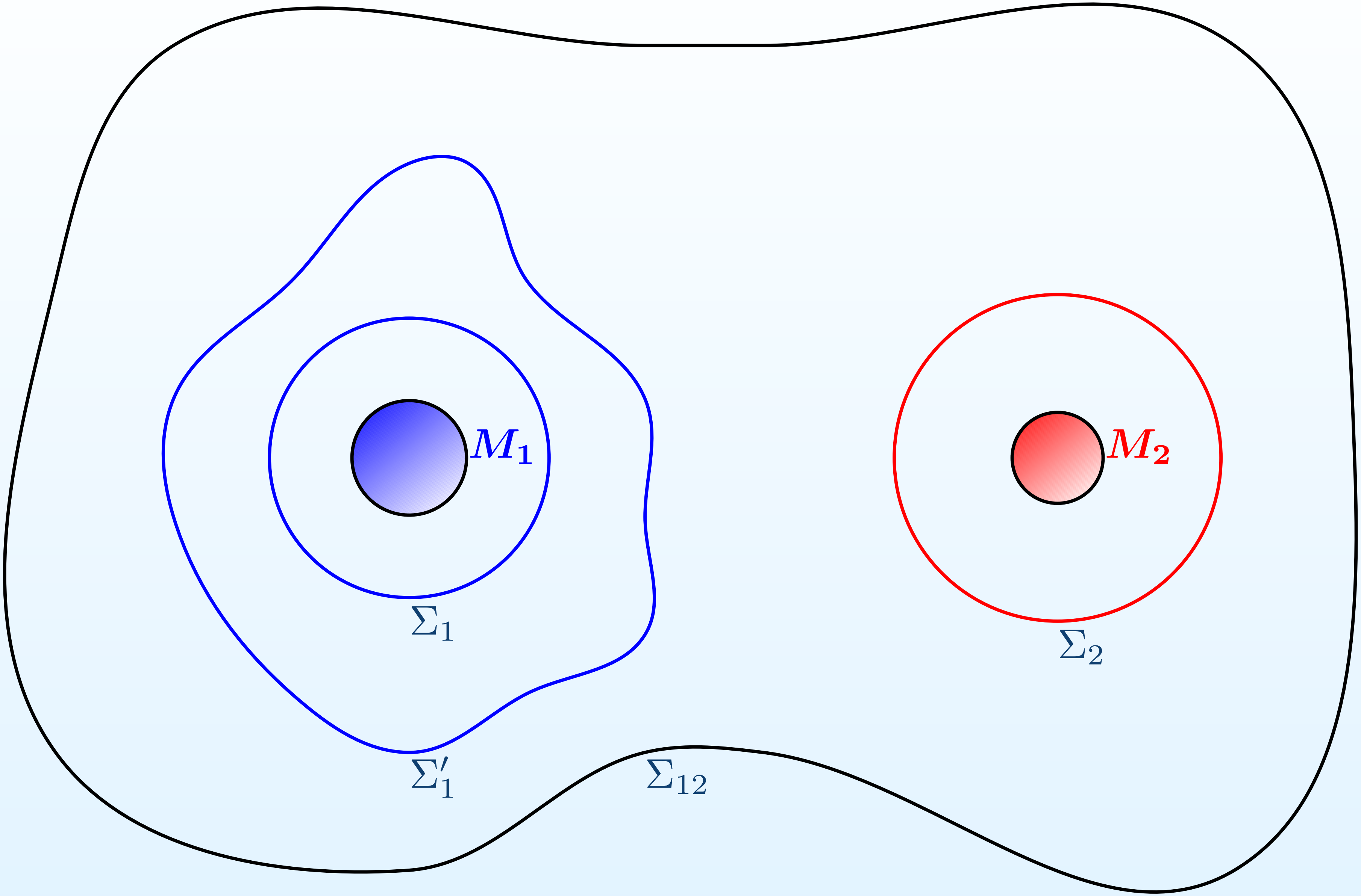
# Magnetische Ladung und Topologie



# Magnetische Ladung und Topologie



# Magnetische Ladung und Topologie



# Magnetische Ladung und Topologie



$$g_\Sigma = -\frac{1}{2e\langle\phi\rangle^3} \oint_\Sigma \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\phi} \cdot \left(\partial^j \boldsymbol{\phi} \times \partial^k \boldsymbol{\phi}\right) \mathrm{d}S^i$$

# Magnetische Ladung und Topologie

$$g_\Sigma = -\frac{1}{2e\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i$$

$$= -\frac{4\pi}{e}\underbrace{\frac{1}{8\pi\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i}_{=N/2}$$

# Magnetische Ladung und Topologie



$$\begin{aligned} g_\Sigma &= -\frac{1}{2e\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i \\ &= -\frac{4\pi}{e}\underbrace{\frac{1}{8\pi\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i}_{=N/2} \end{aligned}$$

$N \in \mathbb{Z}$ heißt Poincaré-Hopf-Index oder Windungszahl und gibt an, wie oft die Abbildung

$$\boldsymbol{\phi} : \Sigma \longrightarrow \mathscr{M}_0 := \left\{\boldsymbol{\phi} : \boldsymbol{\phi}^2 = \langle\phi\rangle^2\right\}$$

die Fläche $\Sigma$ um die Fläche $\mathscr{M}_0$ hüllt.

# Magnetische Ladung und Topologie



$$g_\Sigma = -\frac{1}{2e\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i$$
$$= -\frac{4\pi}{e}\underbrace{\frac{1}{8\pi\langle\phi\rangle^3}\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\partial^j\boldsymbol{\phi}\times\partial^k\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}S^i}_{=N/2}$$

$N\in\mathbb{Z}$ heißt Poincaré-Hopf-Index oder Windungszahl und gibt an, wie oft die Abbildung

$$\boldsymbol{\phi}\,:\,\Sigma\longrightarrow\mathscr{M}_0 := \left\{\boldsymbol{\phi}:\,\boldsymbol{\phi}^2=\langle\phi\rangle^2\right\}$$

die Fläche $\Sigma$ um die Fläche $\mathscr{M}_0$ hüllt.

Es ergibt sich also wieder die Quantisierungsbedingung

$$\frac{eq_{\mathrm{m}}}{4\pi}=\frac{n}{2}\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

# Masse des Monopols



Mit der Bianchi-Identität $\mathscr{D}_\mu * \boldsymbol{G}^{\mu\nu} = 0$ $(\Rightarrow \mathscr{D}_k \mathscr{B}^k_a = 0)$ und der Euler-Lagrange-Gleichung für $\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$ folgt

$$q_\text{m} = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\langle\phi\rangle} \int \mathscr{B}^k_a \left(\mathscr{D}_k \boldsymbol{\phi}\right)_a \mathrm{d}^3 r \ ,$$

$$q_\text{e} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\langle\phi\rangle} \int \mathscr{E}^k_a \left(\mathscr{D}_k \boldsymbol{\phi}\right)_a \mathrm{d}^3 r \ .$$

# Masse des Monopols



Mit der Bianchi-Identität $\mathscr{D}_\mu * \boldsymbol{G}^{\mu\nu} = 0$ $(\Rightarrow \mathscr{D}_k \mathscr{B}_a^k = 0)$ und der Euler-Lagrange-Gleichung für $\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$ folgt

$$q_{\mathrm{m}} = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\langle\phi\rangle} \int \mathscr{B}_a^k \left(\mathscr{D}_k \boldsymbol{\phi}\right)_a \mathrm{d}^3 r \ ,$$

$$q_{\mathrm{e}} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\langle\phi\rangle} \int \mathscr{E}_a^k \left(\mathscr{D}_k \boldsymbol{\phi}\right)_a \mathrm{d}^3 r \ .$$

So ergibt sich für die Masse des Monopols

$$\begin{aligned} M &= \int T_{00} \, \mathrm{d}^3 r \\ &= \int \left( \frac{1}{2} \left[ \left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^0 \boldsymbol{\phi})_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i \boldsymbol{\phi})_a\right)^2 \right] \right. \\ &\qquad \left. + V(\boldsymbol{\phi}) \right) \mathrm{d}^3 r \geq \frac{1}{2} \int \left[ \left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i \boldsymbol{\phi})_a\right)^2 \right] \mathrm{d}^3 r \end{aligned}$$

# Masse des Monopols



$$
\begin{aligned}
M &\geq \frac{1}{2}\int \left[\left(\mathscr{E}_a^i\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^i\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i \boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] \mathrm{d}^3 r \\
&= \frac{1}{2}\int \Bigg( \left[\mathscr{E}_a^k - \left(\mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi}\right)_a \sin\theta\right]^2 + \left[\mathscr{B}_a^k - \left(\mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi}\right)_a \cos\theta\right]^2 \Bigg) \mathrm{d}^3 r \\
&\quad + \langle\phi\rangle \left(q_{\mathrm{e}} \sin\theta + q_{\mathrm{m}} \cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

für beliebiges $\theta \in [0, 2\pi]$.

# Masse des Monopols



$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{2}\int \left[\left(\mathscr{E}^i_a\right)^2 + \left(\mathscr{B}^i_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] \mathrm{d}^3r \\ &= \frac{1}{2}\int \Bigg( \left[\mathscr{E}^k_a - \left(\mathscr{D}^k\boldsymbol{\phi}\right)_a \sin\theta\right]^2 + \left[\mathscr{B}^k_a - \left(\mathscr{D}^k\boldsymbol{\phi}\right)_a \cos\theta\right]^2 \Bigg) \mathrm{d}^3r \\ &\quad + \langle\phi\rangle \left(q_\mathrm{e}\sin\theta + q_\mathrm{m}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

für beliebiges $\theta \in [0, 2\pi]$.

Bogomol’nyi-Schranke : $M \geq \langle\phi\rangle\sqrt{q_\mathrm{e}^2 + q_\mathrm{m}^2}$

# Masse des Monopols



$$
\begin{aligned}
M &\geq \frac{1}{2}\int \left[\left(\mathscr{E}^i_a\right)^2 + \left(\mathscr{B}^i_a\right)^2 + \left((\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\right)^2\right] \mathrm{d}^3r \\
&= \frac{1}{2}\int \left( \left[\mathscr{E}^k_a - \left(\mathscr{D}^k\boldsymbol{\phi}\right)_a \sin\theta\right]^2 + \left[\mathscr{B}^k_a - \left(\mathscr{D}^k\boldsymbol{\phi}\right)_a \cos\theta\right]^2 \right) \mathrm{d}^3r \\
&\quad + \langle\phi\rangle \left(q_{\mathrm{e}}\sin\theta + q_{\mathrm{m}}\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

für beliebiges $\theta \in [0, 2\pi]$.

**Bogomol'nyi-Schranke :** $M \geq \langle\phi\rangle\sqrt{q_{\mathrm{e}}^2 + q_{\mathrm{m}}^2}$

Insbesondere für $q_{\mathrm{e}} = 0$ gilt

$$
M \geq \langle\phi\rangle |q_{\mathrm{m}}| \geq \langle\phi\rangle \frac{4\pi}{2e} = \frac{4\pi}{2e^2} M_{W^\pm} = \frac{1}{2\alpha} M_{W^\pm} .
$$

# Masse des Monopols



$$M \geq \frac{1}{2} \int \left[ \left( \mathscr{E}_a^i \right)^2 + \left( \mathscr{B}_a^i \right)^2 + \left( (\mathscr{D}^i \boldsymbol{\phi})_a \right)^2 \right] \mathrm{d}^3 r$$
$$= \frac{1}{2} \int \left( \left[ \mathscr{E}_a^k - \left( \mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi} \right)_a \sin\theta \right]^2 + \left[ \mathscr{B}_a^k - \left( \mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi} \right)_a \cos\theta \right]^2 \right) \mathrm{d}^3 r$$
$$+ \langle \phi \rangle \left( q_\mathrm{e} \sin\theta + q_\mathrm{m} \cos\theta \right)$$

für beliebiges $\theta \in [0, 2\pi]$.

**Bogomol’nyi-Schranke :** $\quad M \geq \langle \phi \rangle \sqrt{q_\mathrm{e}^2 + q_\mathrm{m}^2}$

Insbesondere für $q_\mathrm{e} = 0$ gilt

$$M \geq \langle \phi \rangle |q_\mathrm{m}| \geq \langle \phi \rangle \frac{4\pi}{2e} = \frac{4\pi}{2e^2} M_{W^\pm} = \frac{1}{2\alpha} M_{W^\pm} \; .$$

Magnetische Monopole sind ziemlich schwer!

# Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield-Monopole

Ist es möglich, die Bogomol'nyi-Schranke zu sättigen, d.h. gibt es Monopole der Masse $\langle\phi\rangle|q_{\mathrm{m}}|$?

# Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield-Monopole

Ist es möglich, die Bogomol’nyi-Schranke zu sättigen, d.h. gibt es Monopole der Masse $\langle\phi\rangle|q_{\mathrm{m}}|$?

$$M \overset{\theta=0,\pi}{=} \int \left( \frac{1}{2} \left[ \left(\mathscr{E}_a^k\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^k - \left(\mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi}\right)_a \cos\theta\right)^2 + \left(\left(\mathscr{D}^0 \boldsymbol{\phi}\right)_a\right)^2 \right] + V(\boldsymbol{\phi}) \right) \mathrm{d}^3 r + \langle\phi\rangle q_{\mathrm{m}} \cos\theta$$

# Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield-Monopole



Ist es möglich, die Bogomol’nyi-Schranke zu sättigen, d.h. gibt es Monopole der Masse $\langle\phi\rangle|q_\mathrm{m}|$?

$$M \overset{\theta=0,\pi}{=} \int \left( \frac{1}{2} \left[ \left(\mathscr{E}_a^k\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^k - \left(\mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi}\right)_a \cos\theta\right)^2 + \left(\left(\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi}\right)_a\right)^2 \right] + V(\boldsymbol{\phi}) \right) \mathrm{d}^3 r + \langle\phi\rangle q_\mathrm{m} \cos\theta$$

Es ist also $M = \langle\phi\rangle|q_\mathrm{m}|$, falls

$$\mathscr{D}^0\boldsymbol{\phi} = 0\,,\ \mathscr{E}_a^i = 0\,,\ \mathscr{B}_a^i = \pm(\mathscr{D}^i\boldsymbol{\phi})_a\,,\ V(\boldsymbol{\phi}) = 0\,.$$

# Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield-Monopole



Ist es möglich, die Bogomol'nyi-Schranke zu sättigen, d.h. gibt es Monopole der Masse $\langle\phi\rangle|q_{\mathsf{m}}|$?

$$M \overset{\theta=0,\pi}{=} \int \left( \frac{1}{2} \left[ \left(\mathscr{E}_a^k\right)^2 + \left(\mathscr{B}_a^k - \left(\mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi}\right)_a \cos\theta\right)^2 + \left(\left(\mathscr{D}^0 \boldsymbol{\phi}\right)_a\right)^2 \right] + V(\boldsymbol{\phi}) \right) \mathrm{d}^3 r + \langle\phi\rangle q_{\mathsf{m}} \cos\theta$$

Es ist also $M = \langle\phi\rangle|q_{\mathsf{m}}|$, falls

$$\mathscr{D}^0 \boldsymbol{\phi} = 0\,,\ \mathscr{E}_a^i = 0\,,\ \mathscr{B}_a^i = \pm(\mathscr{D}^i \boldsymbol{\phi})_a\,,\ V(\boldsymbol{\phi}) = 0\ .$$

Außerhalb vom Higgs-Vakuum nur möglich für $\lambda \to 0$, fordere aber weiterhin $|\phi| \xrightarrow{r\to\infty} \langle\phi\rangle$.

# Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield-Monopole



Bogomol'nyi-Gleichung: $\mathscr{B}_a^i = -(\mathscr{D}^i \phi)_a \Leftrightarrow G_a^{ij} = \varepsilon_{ijk} (\mathscr{D}^k \phi)_a$

# Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield-Monopole



Bogomol'nyi-Gleichung: $\mathscr{B}_a^i = -(\mathscr{D}^i \boldsymbol{\phi})_a \;\Leftrightarrow\; G_a^{ij} = \varepsilon_{ijk} \, (\mathscr{D}^k \boldsymbol{\phi})_a$

Setzt man den 't Hooft-Polyakov-Ansatz ein, so ergeben sich die Differentialgleichungen *erster* Ordnung

$$\xi \dot{K} = -KH \; , \qquad \xi \dot{H} = H - (K^2 - 1)$$

mit den exakten Lösungen

$$H(\xi) = \xi \coth \xi - 1 \; , \qquad K(\xi) = \frac{\xi}{\sinh \xi} \; .$$

# Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield-Monopole



Bogomol'nyi-Gleichung: $\mathscr{B}^i_a = -(\mathscr{D}^i \phi)_a \;\Leftrightarrow\; G^{ij}_a = \varepsilon_{ijk}\,(\mathscr{D}^k \phi)_a$

Setzt man den 't Hooft-Polyakov-Ansatz ein, so ergeben sich die Differentialgleichungen *erster* Ordnung

$$\xi \dot{K} = -KH \, , \qquad \xi \dot{H} = H - (K^2 - 1)$$

mit den exakten Lösungen

$$H(\xi) = \xi \coth \xi - 1 \, , \qquad K(\xi) = \frac{\xi}{\sinh \xi} \, .$$

Es existieren Monopole der Masse $\langle\phi\rangle q_{\mathrm{m}}$!

# Homotopie

# Homotopie



***Definition***: Sei $I^n$ der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$ und $X$ ein topologischer Raum mit $x_0 \in X$.

- Eine stetige Abbildung $\alpha : I^n \to X$ heißt $n$-Schleife bei $x_0$, falls $\alpha(s) = x_0$ für alle $s \in \partial I^n$.
- Zwei $n$-Schleifen $\alpha, \beta : I^n \to X$ heißen homotop zueinander, falls eine stetige Abbildung $\Gamma : I^n \times I \to X$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} \Gamma(s,0) &= \alpha(s) \quad \forall s \in I^n, \\ \Gamma(s,1) &= \beta(s) \quad \forall s \in I^n, \\ \Gamma(s,t) &= x_0 \quad \forall s \in \partial I^n, t \in I. \end{aligned}$$

Dann heißt $\Gamma$ Homotopie zwischen $\alpha$ und $\beta$.

# Homotopie

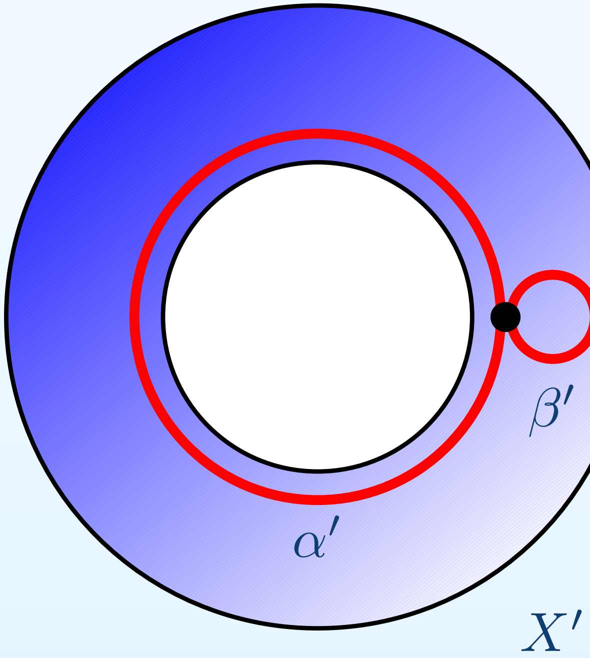
***Bemerkung***: Wegen $I^n/\partial I^n \cong S^n$ lassen sich $n$-Schleifen ebenso gut als Abbildungen $S^n \to X$ definieren.

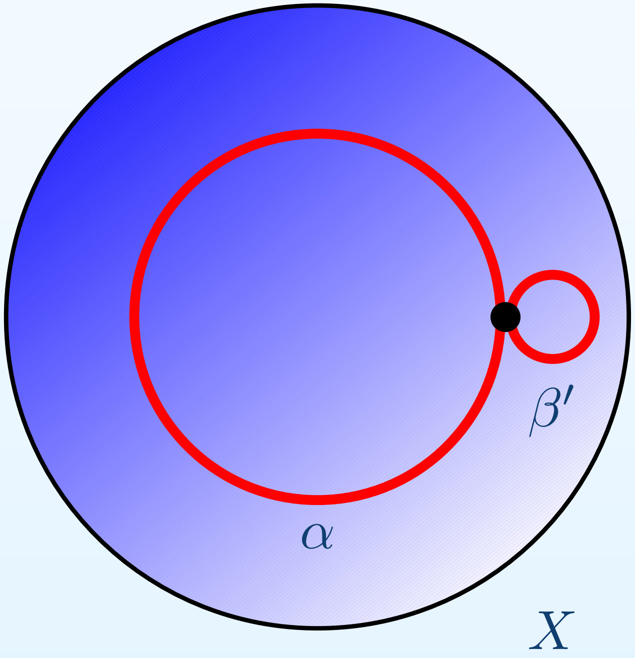
# Homotopie



***Bemerkung***: Wegen $I^n/\partial I^n \cong S^n$ lassen sich $n$-Schleifen ebenso gut als Abbildungen $S^n \to X$ definieren.

***Beispiel***:



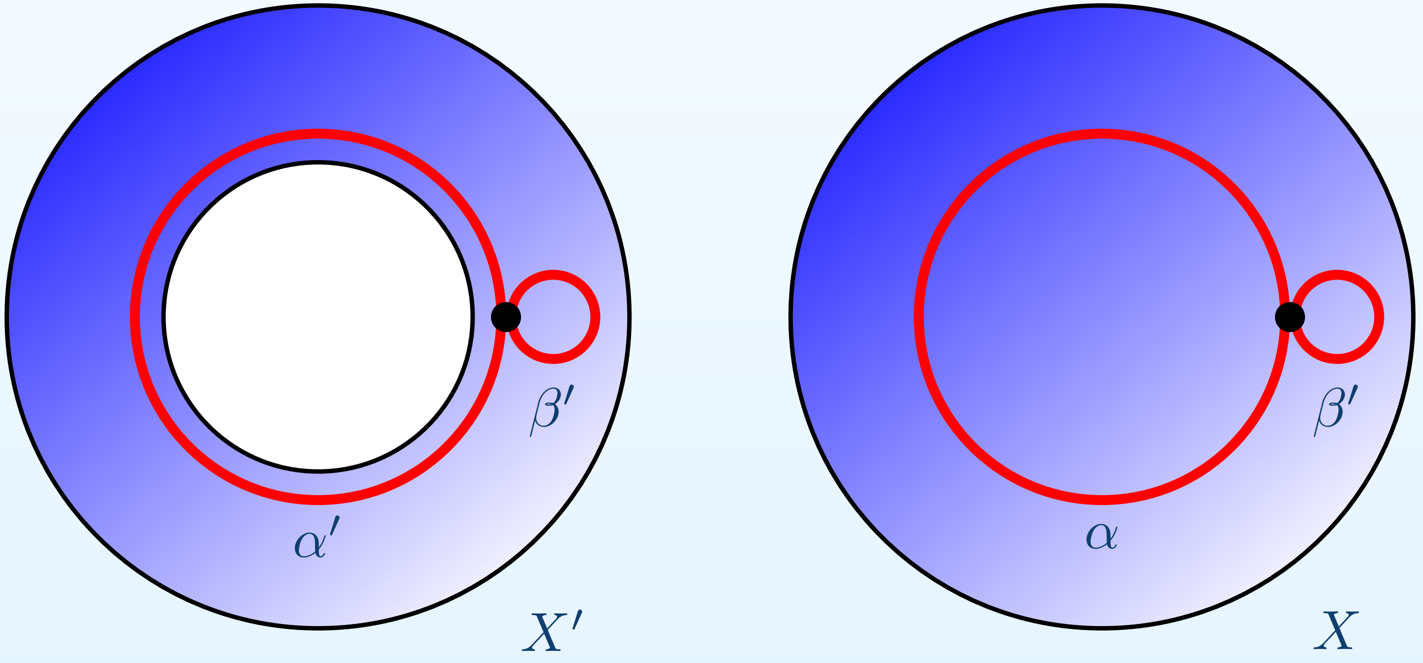



# Homotopie



***Bemerkung***: Wegen $I^n/\partial I^n \cong S^n$ lassen sich $n$-Schleifen ebenso gut als Abbildungen $S^n \to X$ definieren.

***Beispiel***:




$\alpha$ und $\beta$ sind homotop, $\alpha'$ und $\beta'$ sind es nicht.

# Homotopie



***Definition***: Das Produkt $\alpha * \beta$ zweier $n$-Schleifen $\alpha, \beta : I^n \to X$ ist definiert durch

$$(\alpha*\beta)(s_1, \dots, s_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{für } s_1 \in [0, 1/2] \, , \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{für } s_1 \in [1/2, 1] \, . \end{cases}$$

# Homotopie



***Definition***: Das Produkt $\alpha * \beta$ zweier $n$-Schleifen $\alpha, \beta : I^n \to X$ ist definiert durch

$$(\alpha * \beta)(s_1, \ldots, s_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{für } s_1 \in [0, 1/2] \, , \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \text{für } s_1 \in [1/2, 1] \, . \end{cases}$$

Das Inverse $\alpha^{-1}$ von $\alpha$ ist definiert durch

$$\alpha^{-1}(s_1, \ldots, s_n) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(1 - s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad \forall (s_1, \ldots, s_n) \in I^n \, .$$

# Homotopie



***Definition***: Das Produkt $\alpha * \beta$ zweier $n$-Schleifen $\alpha, \beta : I^n \to X$ ist definiert durch

$$(\alpha{*}\beta)(s_1, \ldots, s_n) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{für } s_1 \in [0, 1/2] \, , \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \text{für } s_1 \in [1/2, 1] \, . \end{cases}$$

Das Inverse $\alpha^{-1}$ von $\alpha$ ist definiert durch

$$\alpha^{-1}(s_1, \ldots, s_n) \overset{\text{def}}{=} \alpha(1 - s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad \forall (s_1, \ldots, s_n) \in I^n \; .$$

***Satz***: „Homotop sein zu“ ist eine Äquivalenzrelation, und die Menge der Äquivalenzklassen von Schleifen an $x_0$ bilden eine Gruppe.

# Homotopiegruppe

***Satz***: „Homotop sein zu“ ist eine Äquivalenzrelation, und die Menge der Äquivalenzklassen von Schleifen an $x_0$ bilden eine Gruppe mit dem Produkt $*$ und dem Einselement als derjenigen Klasse, welche die konstante Abbildung $I^n \longrightarrow \{x_0\}$ enthält.

# Homotopiegruppe



***Satz***: „Homotop sein zu“ ist eine Äquivalenzrelation, und die Menge der Äquivalenzklassen von Schleifen an $x_0$ bilden eine Gruppe mit dem Produkt $*$ und dem Einselement als derjenigen Klasse, welche die konstante Abbildung $I^n \longrightarrow \{x_0\}$ enthält.

***Definition***: Diese Gruppe heißt $n$-te Homotopiegruppe von $X$ bei $x_0$, $\pi_n(X, x_0)$.

$\pi_1(X, x_0)$ heißt Fundamentalgruppe von $X$ bei $x_0$.

# Homotopiegruppe



***Satz***: „Homotop sein zu“ ist eine Äquivalenzrelation, und die Menge der Äquivalenzklassen von Schleifen an $x_0$ bilden eine Gruppe mit dem Produkt $*$ und dem Einselement als derjenigen Klasse, welche die konstante Abbildung $I^n \longrightarrow \{x_0\}$ enthält.

***Definition***: Diese Gruppe heißt $n$-te Homotopiegruppe von $X$ bei $x_0$, $\pi_n(X, x_0)$.

$\pi_1(X, x_0)$ heißt Fundamentalgruppe von $X$ bei $x_0$.

***Beispiel***: $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist die „Wickelgruppe“.

# Eigenschaften von Homotopiegruppen

***Satz***: Ist ein topologischer Raum $X$ wegzusammenhängend, dann gilt

$$\pi_n(X, x_1) \cong \pi_n(X, x_2) \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in X \ .$$

In diesem Fall schreibt man schlicht $\pi_n(X)$.

# Eigenschaften von Homotopiegruppen



***Satz***: Ist ein topologischer Raum $X$ wegzusammenhängend, dann gilt

$$\pi_n(X, x_1) \cong \pi_n(X, x_2) \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in X \ .$$

In diesem Fall schreibt man schlicht $\pi_n(X)$.

***Satz***: Ein einfach zusammenhängender topologischer Raum $X$ hat eine triviale Homotopiegruppe, $\pi_n(X) = 0$:

Jede Schleife lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen.

# Eigenschaften von Homotopiegruppen



***Satz***: Ist ein topologischer Raum $X$ wegzusammenhängend, dann gilt

$$\pi_n(X, x_1) \cong \pi_n(X, x_2) \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in X \ .$$

In diesem Fall schreibt man schlicht $\pi_n(X)$.

***Satz***: Ein einfach zusammenhängender topologischer Raum $X$ hat eine triviale Homotopiegruppe, $\pi_n(X) = 0$:

Jede Schleife lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen.

***Satz***: Für zwei wegzusammenhängende topologische Räume $X, Y$ gilt

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \ .$$

# Eigenschaften von Homotopiegruppen



***Satz***: Für zwei wegzusammenhängende topologische Räume $X, Y$ gilt

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \ .$$

# Eigenschaften von Homotopiegruppen



***Satz***: Für zwei wegzusammenhängende topologische Räume $X, Y$ gilt

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \ .$$

***Beispiel***: Für die Fundamentalgruppe des $n$-Torus gilt

$$\pi_1(T^n) = \pi_1(S^1 \times \ldots \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \ .$$

# Eigenschaften von Homotopiegruppen

***Satz***: Für zwei wegzusammenhängende topologische Räume $X, Y$ gilt

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \ .$$

***Beispiel***: Für die Fundamentalgruppe des $n$-Torus gilt

$$\pi_1(T^n) = \pi_1(S^1 \times \ldots \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \ .$$

***Beispiel***: Sei $X$ einfach zusammenhängend und $Y$ wegzusammenhängend. Dann gilt

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \cong \pi_n(Y) \ .$$

# Eigenschaften von Homotopiegruppen

***Beispiel***: Sei $X$ einfach zusammenhängend und $Y$ wegzusammenhängend. Dann gilt

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \cong \pi_n(Y) \, .$$

# Eigenschaften von Homotopiegruppen



***Beispiel***: Sei $X$ einfach zusammenhängend und $Y$ wegzusammenhängend. Dann gilt

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \cong \pi_n(Y) \ .$$

***Satz***: Sei $G$ eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe. Dann gilt

$$\pi_2(G/H) \cong \ker\big(\pi_1(H) \longrightarrow \pi_1(G)\big) \ .$$

Insbesondere ist $\pi_2(G/H) \cong \pi_1(H)$, falls $G$ wegzusammenhängend ist.

# Monopole in Eichfeldtheorien II

# Higgs-Vakuum

Untersucht werden allgemein Eichfeldtheorien mit beliebiger Strukturgruppe $G$ und Potential $V \geq 0$:

$$\mathscr{L}_{\text{YMH}} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + (\mathscr{D}^\mu \Phi)^\dagger (\mathscr{D}_\mu \Phi) - V(\Phi)$$

# Higgs-Vakuum



Untersucht werden allgemein Eichfeldtheorien mit beliebiger Strukturgruppe $G$ und Potential $V \geq 0$:

$$\mathscr{L}_{\text{YMH}} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + (\mathscr{D}^\mu \Phi)^\dagger (\mathscr{D}_\mu \Phi) - V(\Phi)$$

***Annahme***: Für Feldkonfigurationen endlicher Energie gilt, dass sie überall außerhalb einer endlichen Anzahl kompakter Gebiete („Monopole“) in guter Näherung im Higgs-Vakuum liegen:

$$V(\Phi) = 0 \, , \qquad \mathscr{D}^\mu \Phi = 0 \, .$$

# $V(\Phi) = 0$

**Higgs-Vakuum :** $\quad V(\Phi) = 0 \, , \qquad \mathscr{D}^{\mu}\Phi = 0 \, .$

# $V(\Phi) = 0$



Higgs-Vakuum : $V(\Phi) = 0\ ,\qquad \mathscr{D}^\mu \Phi = 0\ .$

Außerdem wirke $G$ transitiv auf die Mannigfaltigkeit der $V$ minimierenden Felder

$$\mathscr{M}_0 = \left\{ \Phi :\ V(\Phi) = 0 \right\} = \left[ \Phi \right]_G \ ,$$

d.h.

$$\forall \Phi_1, \Phi_2 \in \mathscr{M}_0 \ \ \exists g \in G :\ \ \Phi_1 = \rho(g) \Phi_2 \ .$$

# $V(\Phi) = 0$



Higgs-Vakuum : $\quad V(\Phi) = 0 \,, \qquad \mathscr{D}^\mu \Phi = 0 \,.$

Außerdem wirke $G$ transitiv auf die Mannigfaltigkeit der $V$ minimierenden Felder

$$\mathscr{M}_0 = \Big\{ \Phi : \; V(\Phi) = 0 \Big\} = [\Phi]_G \,,$$

d.h.

$$\forall \Phi_1, \Phi_2 \in \mathscr{M}_0 \;\; \exists g \in G : \;\; \Phi_1 = \rho(g)\Phi_2 \;.$$

Die kleine Gruppe von $\Phi \in \mathscr{M}_0$ lässt $\Phi$ invariant,

$$H_{\Phi_1} \overset{\text{def}}{=} \Big\{ h \in G : \;\; \rho(h)\Phi_1 = \Phi_1 \Big\} = \rho(g) H_{\Phi_2} \rho(g^{-1}) \;.$$

# $V(\Phi) = 0$



Higgs-Vakuum : $V(\Phi) = 0\ ,\qquad \mathscr{D}^\mu \Phi = 0\ .$

Außerdem wirke $G$ transitiv auf die Mannigfaltigkeit der $V$ minimierenden Felder

$$\mathscr{M}_0 = \Big\{\Phi :\ V(\Phi) = 0\Big\} = \big[\Phi\big]_G\ ,$$

d.h.

$$\forall \Phi_1, \Phi_2 \in \mathscr{M}_0 \ \ \exists g \in G :\ \Phi_1 = \rho(g)\Phi_2\ .$$

Die kleine Gruppe von $\Phi \in \mathscr{M}_0$ lässt $\Phi$ invariant,

$$H_{\Phi_1} \overset{\text{def}}{=} \Big\{h \in G :\ \rho(h)\Phi_1 = \Phi_1\Big\} = \rho(g) H_{\Phi_2} \rho(g^{-1})\ .$$

# $V(\Phi) = 0$

$$H_\Phi = \left\{ h \in G : \ \rho(h)\Phi = \Phi \right\}$$

# $V(\Phi) = 0$



$$H_\Phi = \Big\{ h \in G : \ \rho(h)\Phi = \Phi \Big\}$$

Für ein festes $\Phi_0 \in \mathscr{M}_0$ setze $H := H_{\Phi_0}$.

# $V(\Phi) = 0$



$$H_\Phi = \Big\{ h \in G : \ \rho(h)\Phi = \Phi \Big\}$$

Für ein festes $\Phi_0 \in \mathscr{M}_0$ setze $H := H_{\Phi_0}$.

Assoziiere $g \in G$ zu $\Phi \in \mathscr{M}_0$ durch

$$\Phi = \rho(g)\Phi_0 \ .$$

# $V(\Phi) = 0$



$$H_\Phi = \Big\{ h \in G : \; \rho(h)\Phi = \Phi \Big\}$$

Für ein festes $\Phi_0 \in \mathscr{M}_0$ setze $H := H_{\Phi_0}$.

Assoziiere $g \in G$ zu $\Phi \in \mathscr{M}_0$ durch

$$\Phi = \rho(g)\Phi_0 \; .$$

Falls $\rho(g_1)\Phi_0 = \Phi = \rho(g_2)\Phi_0$, dann ist $\rho(g_1^{-1})\rho(g_2)\Phi_0 = \Phi_0$, also $g_1^{-1} g_2 \in H$.

# $V(\Phi) = 0$



$$H_\Phi = \Big\{ h \in G : \ \rho(h)\Phi = \Phi \Big\}$$

Für ein festes $\Phi_0 \in \mathscr{M}_0$ setze $H := H_{\Phi_0}$.

Assoziiere $g \in G$ zu $\Phi \in \mathscr{M}_0$ durch

$$\Phi = \rho(g)\Phi_0 \ .$$

Falls $\rho(g_1)\Phi_0 = \Phi = \rho(g_2)\Phi_0$, dann ist $\rho(g_1^{-1})\rho(g_2)\Phi_0 = \Phi_0$, also $g_1^{-1} g_2 \in H$.

$g_1$ und $g_2$ gehören also zur selben Restklasse von $H$ in $G$, und damit

$$\mathscr{M}_0 \cong G/H \ .$$

# $\mathscr{D}^\mu \Phi = 0$



Aus $\mathscr{D}^\mu \Phi = 0$ folgt

$$\rho(G^{\mu\nu})\Phi = \mathrm{i}e\,[\mathscr{D}^\mu, \mathscr{D}^\nu]\,\Phi = 0\ ,$$

d.h. die einzigen im Higgs-Vakuum nicht-verschwindenden Komponenten des Feldstärketensors sind diejenigen, welche zu den Generatoren von $H_\Phi$ gehören. Nur diese Eichfelder haben im Higgs-Vakuum Bestand.

# $\mathscr{D}^\mu \Phi = 0$



Aus $\mathscr{D}^\mu \Phi = 0$ folgt

$$\rho(G^{\mu\nu})\Phi = \mathrm{i}e\left[\mathscr{D}^\mu, \mathscr{D}^\nu\right]\Phi = 0\ ,$$

d.h. die einzigen im Higgs-Vakuum nicht-verschwindenden Komponenten des Feldstärketensors sind diejenigen, welche zu den Generatoren von $H_\Phi$ gehören. Nur diese Eichfelder haben im Higgs-Vakuum Bestand.

Im Georgi-Glashow-Modell folgt daraus gerade $F^{\mu\nu}_{\text{EM}} = \frac{1}{\langle\phi\rangle}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$.

# Topologische Quantenzahlen

Im Higgs-Vakuum ist die Situation also folgende:

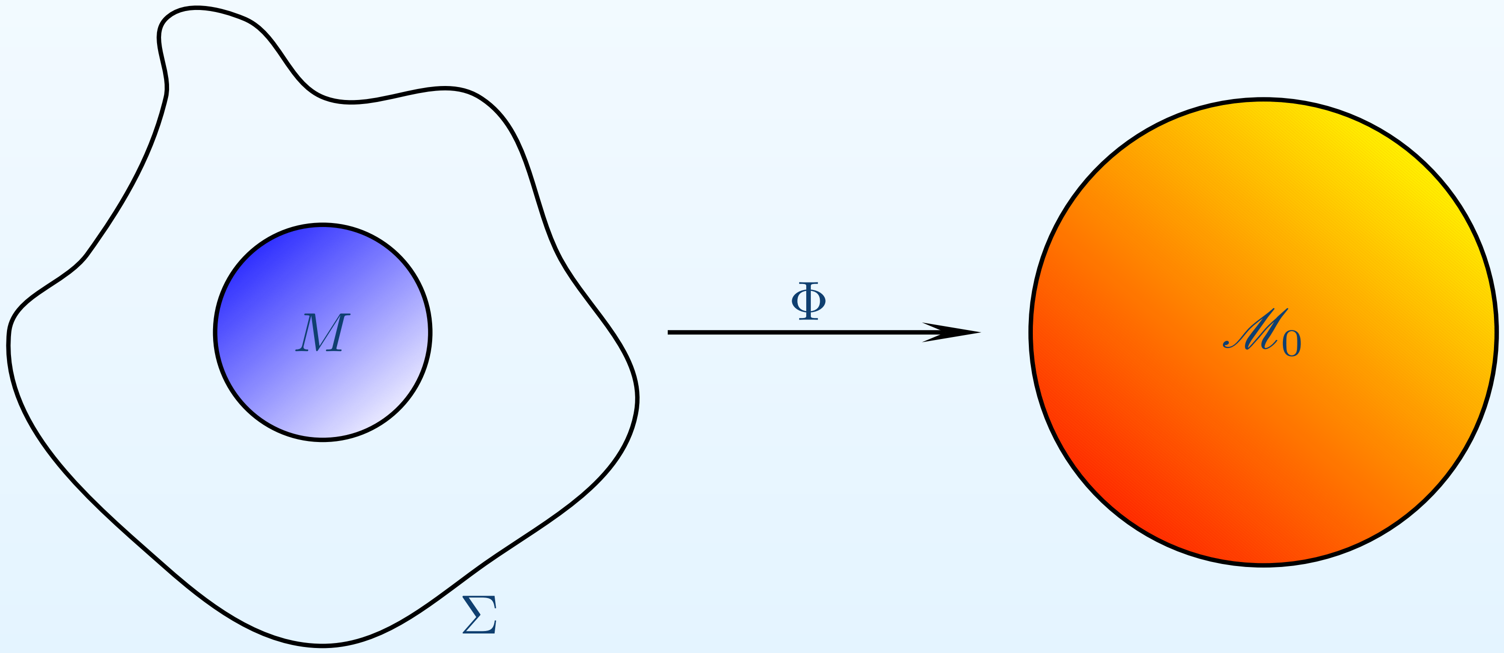
Eine die Monopole umschließende Fläche $\Sigma \cong S^2$ wird durch das Higgs-Feld $\Phi$ zu jedem Zeitpunkt auf $\mathscr{M}_0$ abgebildet.

# Topologische Quantenzahlen



Im Higgs-Vakuum ist die Situation also folgende:

Eine die Monopole umschließende Fläche $\Sigma \cong S^2$ wird durch das Higgs-Feld $\Phi$ zu jedem Zeitpunkt auf $\mathscr{M}_0$ abgebildet.



# Topologische Quantenzahlen



Die Feldkonfigurationen endlicher Energie ordnen sich in Restklassen der Homotopiegruppe $\pi_2(\mathscr{M}_0)$.

# Topologische Quantenzahlen

Die Feldkonfigurationen endlicher Energie ordnen sich in Restklassen der Homotopiegruppe $\pi_2(\mathscr{M}_0)$.

Insbesondere sind folgende Deformationen von $\Phi$ zueinander homotop:

(i) Zeitentwicklung von $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t) : \Sigma \to \mathscr{M}_0$

(ii) Eichtransformationen

(iii) Deformationen durch andere Wahl von $\Sigma$

# Topologische Quantenzahlen

Die Feldkonfigurationen endlicher Energie ordnen sich in Restklassen der Homotopiegruppe $\pi_2(\mathscr{M}_0)$.

Insbesondere sind folgende Deformationen von $\Phi$ zueinander homotop:

(i) Zeitentwicklung von $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t) : \Sigma \to \mathscr{M}_0$

(ii) *Eichtransformationen*

(iii) Deformationen durch andere Wahl von $\Sigma$

Sei $\Phi_2 = \rho(g)\Phi_1$.
Deformiere $g : \Sigma \to G$ stetig, so dass $g(\boldsymbol{x} = 0) = 1\!\!1$.
$\Gamma(\theta, \varphi, t) \overset{\text{def}}{=} \rho(g(tr_\Sigma, \theta, \varphi))\Phi_1(r_\Sigma, \theta, \varphi)$ ist Homotopie zwischen $\Phi_1$ und $\Phi_2$.

# Topologische Quantenzahlen



Die Feldkonfigurationen endlicher Energie ordnen sich in Restklassen der Homotopiegruppe $\pi_2(\mathscr{M}_0)$.

Insbesondere sind folgende Deformationen von $\Phi$ zueinander homotop:

(i) Zeitentwicklung von $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t) : \Sigma \to \mathscr{M}_0$

(ii) *Eichtransformationen*

(iii) Deformationen durch andere Wahl von $\Sigma$

Sei $\Phi_2 = \rho(g)\Phi_1$.
Deformiere $g : \Sigma \longrightarrow G$ stetig, so dass $g(\boldsymbol{x} = 0) = \mathbb{1}$.
$\Gamma(\theta, \varphi, t) \overset{\text{def}}{=} \rho(g(tr_\Sigma, \theta, \varphi))\Phi_1(r_\Sigma, \theta, \varphi)$ ist Homotopie zwischen $\Phi_1$ und $\Phi_2$.

Je nach Struktur von $\pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \pi_2(G/H)$ korrespondiert zu Feldkonfigurationen eine „topologische Quantenzahl".

# Topologische Quantenzahlen

***Beispiele***:

- Georgi-Glashow-Modell: $G = SO(3)$, $\mathscr{M}_0 \cong S^2$
  $\Rightarrow \pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \mathbb{Z}$
  „You cannot peel an orange without breaking the skin.“

# Topologische Quantenzahlen



***Beispiele***:

- Georgi-Glashow-Modell: $G = SO(3)$, $\mathscr{M}_0 \cong S^2$
  $\Rightarrow \pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \mathbb{Z}$
  „You cannot peel an orange without breaking the skin."
- elektroschwache Theorie: $G = SU(2) \times U(1)_Y$, $H = U(1)_{\text{EM}}$
  $\Rightarrow \pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \pi_2(G/H) \cong \ker\{\pi_1(H) \to \pi_1(G)\} = 0$

# Topologische Quantenzahlen

***Beispiele***:

- Georgi-Glashow-Modell: $G = SO(3)$, $\mathscr{M}_0 \cong S^2$
  $\Rightarrow \pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \mathbb{Z}$
  „You cannot peel an orange without breaking the skin.“
- elektroschwache Theorie: $G = SU(2) \times U(1)_Y$, $H = U(1)_{\text{EM}}$
  $\Rightarrow \pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \pi_2(G/H) \cong \ker\big\{\pi_1(H) \to \pi_1(G)\big\} = 0$
- GUT: Sei $G$ eine einfach zusammenhängende Strukturgruppe, die bei $M_X \approx 10^{16}$ GeV zu $G_{\text{SM}} = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ gebrochen wird.
  $\Rightarrow \pi_2(G/G_{\text{SM}}) \cong \pi_1(G_{\text{SM}}) \cong 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$
  Wurden vielleicht sehr schwere Monopole bei einem Phasenübergang im frühen Universum erschaffen?

# Topologische Schrödinger-Gleichung



Feldkonfigurationen, die zu nicht-trivialen Klassen in $\pi_2(\mathscr{M}_0)$ gehören, beschreiben magnetische Monopole.

# Topologische Schrödinger-Gleichung



Feldkonfigurationen, die zu nicht-trivialen Klassen in $\pi_2(\mathscr{M}_0)$ gehören, beschreiben magnetische Monopole.

Bisher: $\pi_2(\mathscr{M}_0)$ erst charakterisiert durch $\Phi : \Sigma \to \mathscr{M}_0$, dann durch $H$, $\pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \pi_2(G/H)$.

# Topologische Schrödinger-Gleichung



Feldkonfigurationen, die zu nicht-trivialen Klassen in $\pi_2(\mathscr{M}_0)$ gehören, beschreiben magnetische Monopole.

Bisher: $\pi_2(\mathscr{M}_0)$ erst charakterisiert durch $\Phi : \Sigma \to \mathscr{M}_0$, dann durch $H$, $\pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \pi_2(G/H)$.

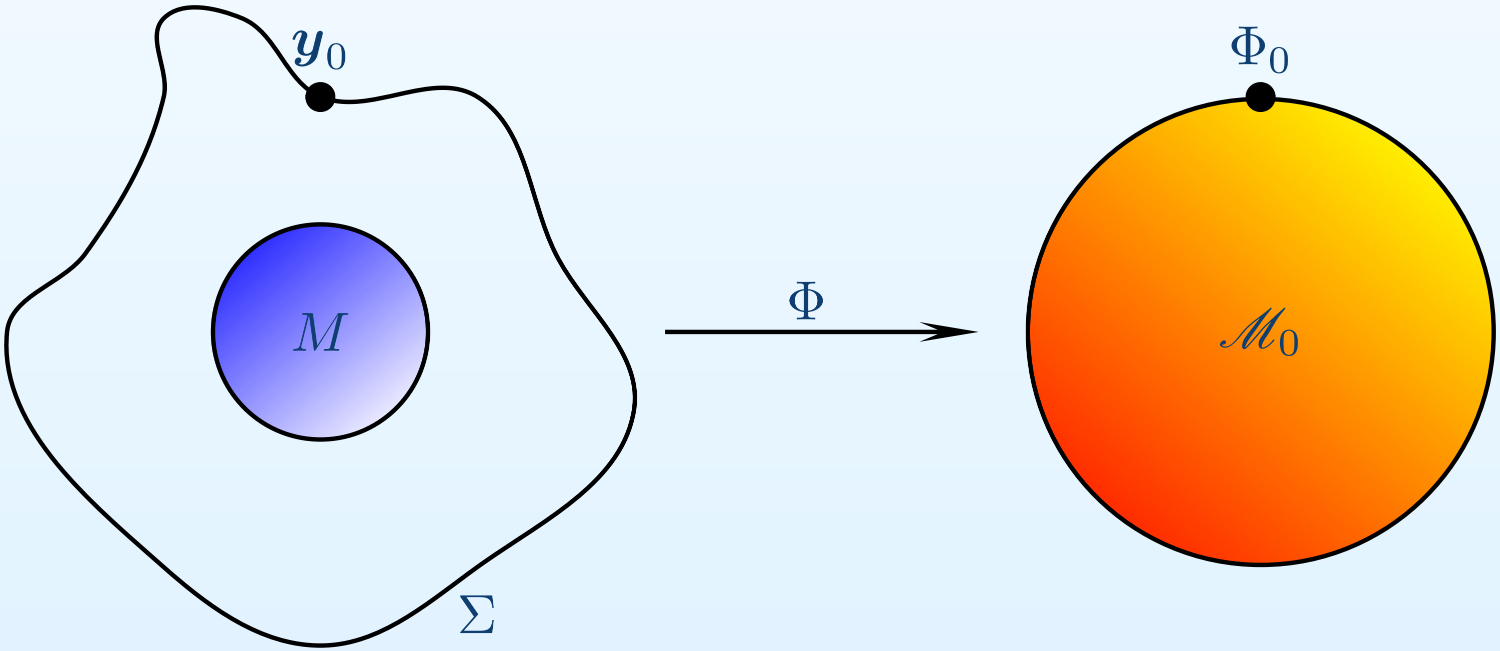
Nun: Beschreibung nur durch physikalische Eichfelder, die im Higgs-Vakuum überleben.

# Topologische Schrödinger-Gleichung

Feldkonfigurationen, die zu nicht-trivialen Klassen in $\pi_2(\mathscr{M}_0)$ gehören, beschreiben magnetische Monopole.

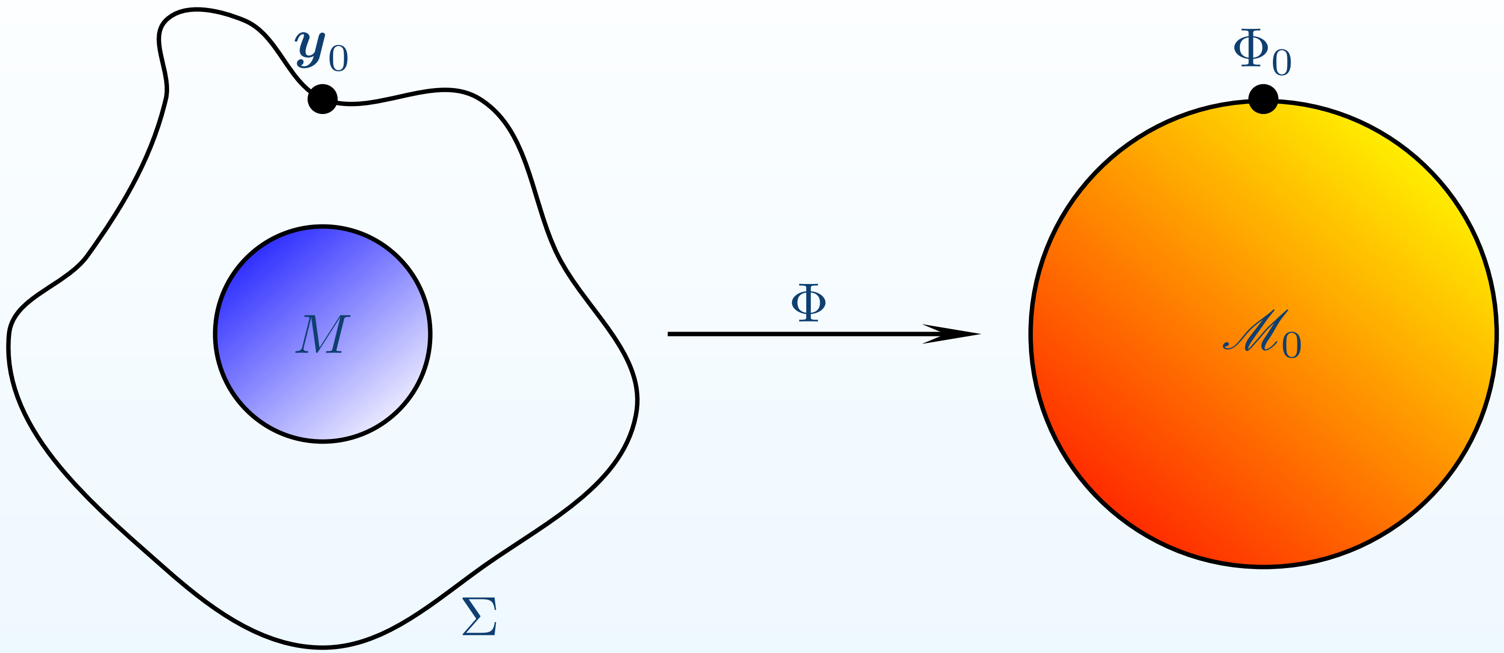
Bisher: $\pi_2(\mathscr{M}_0)$ erst charakterisiert durch $\Phi : \Sigma \to \mathscr{M}_0$, dann durch $H$, $\pi_2(\mathscr{M}_0) \cong \pi_2(G/H)$.

Nun: Beschreibung nur durch physikalische Eichfelder, die im Higgs-Vakuum überleben.



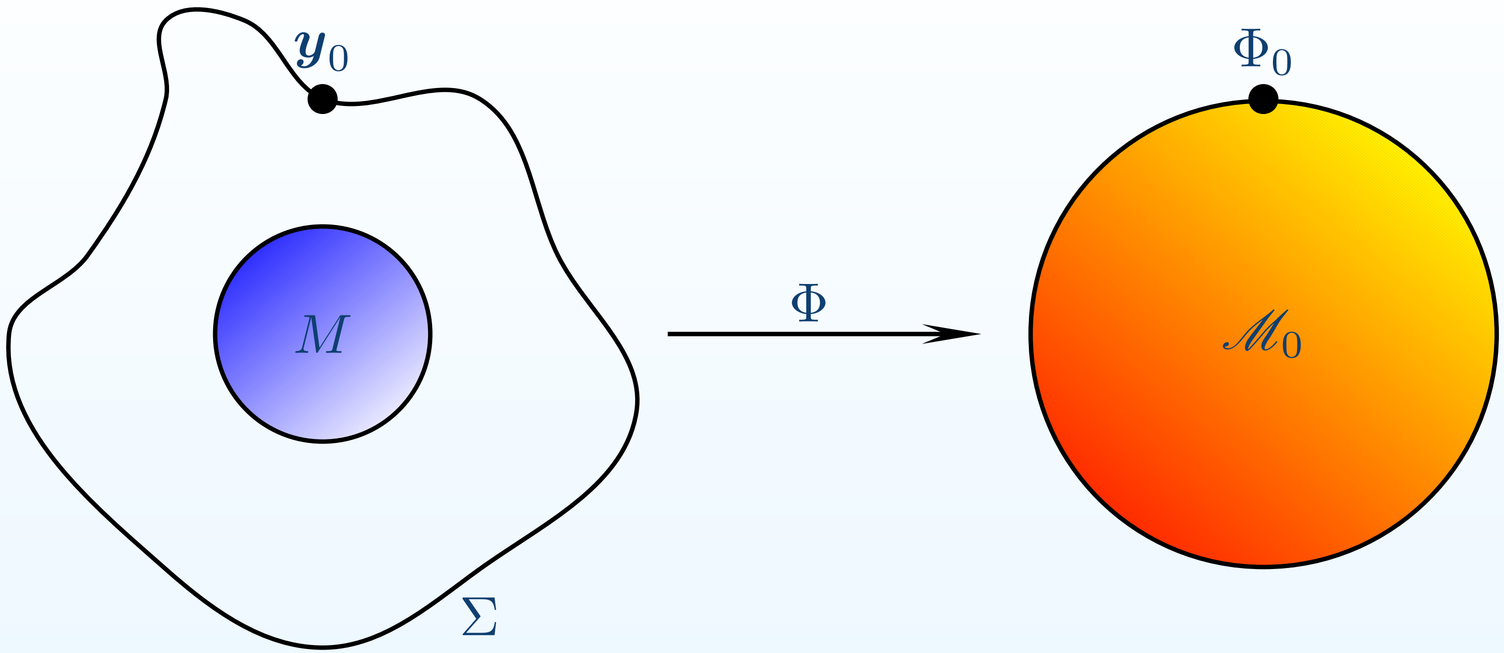
# Topologische Schrödinger-Gleichung





# Topologische Schrödinger-Gleichung





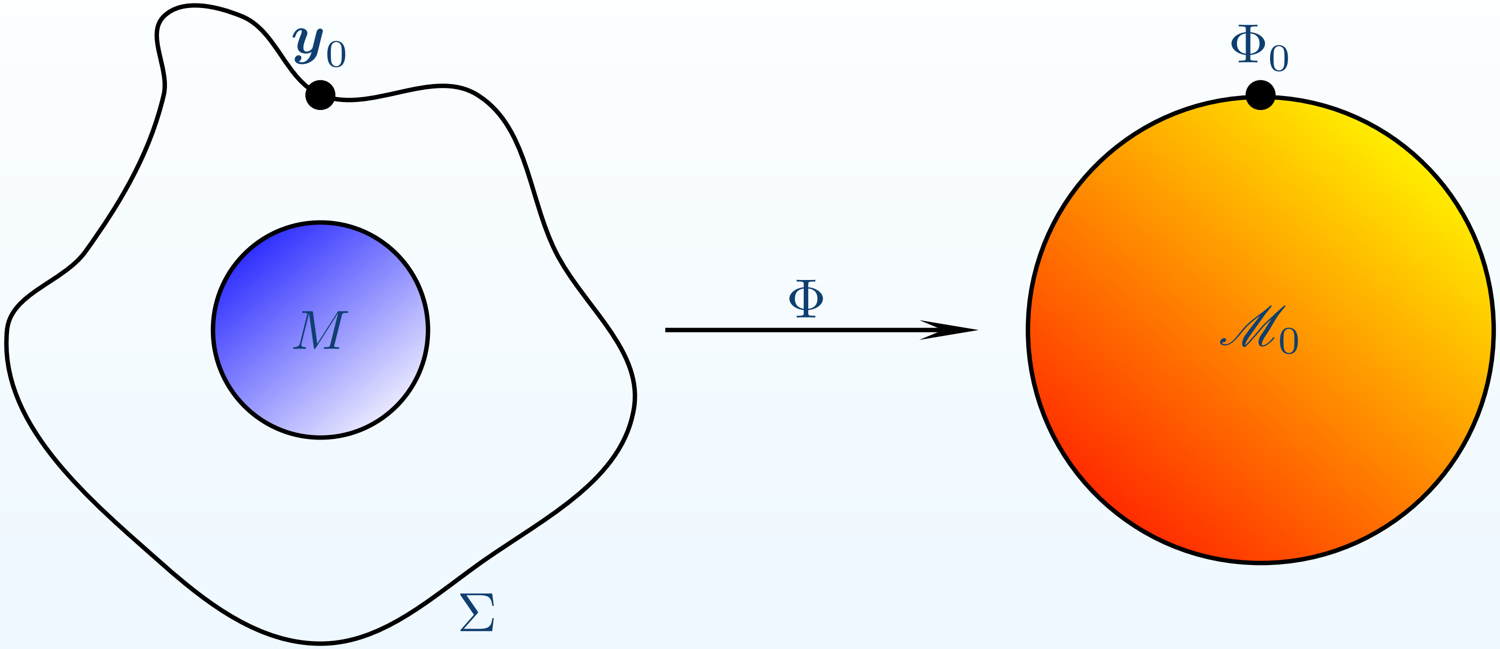

Parametrisiere $\Sigma \cong S^2$ durch $\boldsymbol{y} : I^2 \to \Sigma$,

$$\Sigma = \Big\{ \boldsymbol{y}(s,t) : \ s,t \in [0,1] \Big\}$$

mit $\boldsymbol{y}(s,t) = \boldsymbol{y}_0$ für alle $(s,t) \in \partial I^2$.

# Topologische Schrödinger-Gleichung






Parametrisiere $\Sigma \cong S^2$ durch $\boldsymbol{y} : I^2 \to \Sigma$,

$$\Sigma = \Big\{ \boldsymbol{y}(s,t) : \ s,t \in [0,1] \Big\}$$

mit $\boldsymbol{y}(s,t) = \boldsymbol{y}_0$ für alle $(s,t) \in \partial I^2$. Wegen $\mathscr{D}^\mu \Phi = 0$ gilt

$$\mathscr{D}_t \Phi = \frac{\partial y^i}{\partial t} \mathscr{D}_i \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(s,0) = \Phi_0 \ \ \forall s \in [0,1] \, .$$

# Topologische Schrödinger-Gleichung

$$\mathscr{D}_t \Phi = \frac{\partial y^i}{\partial t} \mathscr{D}_i \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(s,0) = \Phi_0 \;\; \forall s \in [0,1] \, .$$

# Topologische Schrödinger-Gleichung



$$\mathscr{D}_t \Phi = \frac{\partial y^i}{\partial t} \mathscr{D}_i \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(s,0) = \Phi_0 \;\; \forall s \in [0,1] \, .$$

Mit $\Phi(s,t) = \rho(g(s,t))\Phi_0$ wird daraus

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(g)\Phi_0 = \mathrm{i}e\rho(W^i)\,\frac{\partial y^i}{\partial t}\,\rho(g)\Phi_0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1] \, .$$

# Topologische Schrödinger-Gleichung



$$\mathscr{D}_t \Phi = \frac{\partial y^i}{\partial t} \mathscr{D}_i \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(s,0) = \Phi_0 \ \ \forall s \in [0,1] \, .$$

Mit $\Phi(s,t) = \rho(g(s,t))\Phi_0$ wird daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(g) \Phi_0 = \mathrm{i} e \rho(W^i) \, \frac{\partial y^i}{\partial t} \, \rho(g) \Phi_0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \ \ \forall s \in [0,1] \, .$$

Schrödinger-Gleichung $\quad$ $g$ entspricht Zeitentwicklungsoperator

# Topologische Schrödinger-Gleichung

$$\mathscr{D}_t \Phi = \frac{\partial y^i}{\partial t} \mathscr{D}_i \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(s,0) = \Phi_0 \;\; \forall s \in [0,1] \, .$$

Mit $\Phi(s,t) = \rho(g(s,t))\Phi_0$ wird daraus

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(g)\Phi_0 = \mathrm{i}e\rho(W^i)\,\frac{\partial y^i}{\partial t}\,\rho(g)\Phi_0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1] \, .$$

Wird gelöst durch die Dyson-Reihe:

$$g(s,t) = \mathscr{T} \exp\left( \mathrm{i}e \int_0^t W^i \, \frac{\partial y^i}{\partial t} \, \mathrm{d}t \right)$$

# Topologische Schrödinger-Gleichung



$$\mathscr{D}_t \Phi = \frac{\partial y^i}{\partial t} \mathscr{D}_i \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi(s,0) = \Phi_0 \;\; \forall s \in [0,1] \; .$$

Mit $\Phi(s,t) = \rho(g(s,t))\Phi_0$ wird daraus

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(g)\Phi_0 = \mathrm{i}e\rho(W^i)\,\frac{\partial y^i}{\partial t}\,\rho(g)\Phi_0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = 1\!\!1 \;\; \forall s \in [0,1] \; .$$

Wird gelöst durch die Dyson-Reihe:

$$g(s,t) = \mathscr{T} \exp\left( \mathrm{i}e \int_0^t W^i \,\frac{\partial y^i}{\partial t}\, \mathrm{d}t \right)$$

$g(s,t) = 1\!\!1$ für $t = 0$ und $s = 0, 1$, definiere also $h$ durch

$$h(s) = g(s,1) = \mathscr{T} \exp\left( \mathrm{i}e \int_0^1 W^i \,\frac{\partial y^i}{\partial t}\, \mathrm{d}t \right) \; .$$

# Topologische Schrödinger-Gleichung



$$h(s) = g(s,1) = \mathscr{T} \exp\left( \mathrm{i}e \int_0^1 W^i \, \frac{\partial y^i}{\partial t} \, \mathrm{d}t \right) , \quad h(0) = \mathbb{1} = h(1)$$

# Topologische Schrödinger-Gleichung



$$h(s) = g(s,1) = \mathscr{T} \exp\left(\mathrm{i}e \int_0^1 W^i \frac{\partial y^i}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) , \quad h(0) = \mathbb{1} = h(1)$$

Außerdem ist $\Phi(s,t) = \rho(g(s,t))\Phi_0$ und $\Phi(s,1) = \Phi_0$, d.h.:

$h$ ist eine Schleife in $H$ und repräsentiert eine Klasse in $\pi_1(H)$.

# Topologische Schrödinger-Gleichung



$$h(s) = g(s,1) = \mathscr{T} \exp\left( \mathrm{ie} \int_0^1 W^i \frac{\partial y^i}{\partial t} \, \mathrm{d}t \right) , \quad h(0) = \mathbb{1} = h(1)$$

Außerdem ist $\Phi(s,t) = \rho(g(s,t))\Phi_0$ und $\Phi(s,1) = \Phi_0$, d.h.:

$h$ ist eine Schleife in $H$ und repräsentiert eine Klasse in $\pi_1(H)$.

Andererseits korrespondiert $h \in [h] \in \pi_1(H)$ wegen $\Phi(s,1) = \rho(h(s))\Phi_0$ zu einem Element aus $\pi_2(G/H) \cong \pi_2(\mathscr{M}_0)$.

# Topologische Schrödinger-Gleichung



$$h(s) = g(s,1) = \mathscr{T} \exp\left(\mathrm{ie} \int_0^1 W^i \frac{\partial y^i}{\partial t} \, \mathrm{d}t\right), \quad h(0) = \mathbb{1} = h(1)$$

Außerdem ist $\Phi(s,t) = \rho(g(s,t))\Phi_0$ und $\Phi(s,1) = \Phi_0$, d.h.:

$h$ ist eine Schleife in $H$ und repräsentiert eine Klasse in $\pi_1(H)$.

Andererseits korrespondiert $h \in [h] \in \pi_1(H)$ wegen $\Phi(s,1) = \rho(h(s))\Phi_0$ zu einem Element aus $\pi_2(G/H) \cong \pi_2(\mathscr{M}_0)$.

Damit lässt sich explizit die Einbettung von

$$\pi_2(G/H) \cong \ker\big(\pi_1(H) \longrightarrow \pi_1(G)\big)$$

konstruieren.

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal



$$\mathscr{D}_t g(s,t) = 0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1] \; .$$

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal



$$\mathscr{D}_t g(s,t) = 0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1]\,.$$

Trick: Schreibe

$$\mathscr{D}_t g = g\partial_t \quad \Rightarrow \quad g^{-1}\mathscr{D}_t = \partial_t g^{-1}$$

als Operatoridentität.

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal



$$\mathscr{D}_t g(s,t) = 0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1] \, .$$

Trick: Schreibe

$$\mathscr{D}_t g = g \partial_t \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \mathscr{D}_t = \partial_t g^{-1}$$

als Operatoridentität.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \partial_t \left( g^{-1} \mathscr{D}_s g \right) &= \left( \partial_t g^{-1} \right) \mathscr{D}_s g + \underbrace{g^{-1} \partial_t \left( \mathscr{D}_s g \right)}_{= \mathscr{D}_t (g^{-1} \mathscr{D}_s g) = 0} \\ &= g^{-1} \mathscr{D}_t \mathscr{D}_s g \\ &= g^{-1} \left[ \mathscr{D}_t , \mathscr{D}_s \right] g \\ &= \mathrm{i} e g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s} \end{aligned}$$

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal

$$\mathscr{D}_t g(s,t) = 0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1] \, .$$

Trick: Schreibe

$$\mathscr{D}_t g = g \partial_t \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \mathscr{D}_t = \partial_t g^{-1}$$

als Operatoridentität.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \partial_t \left( g^{-1} \mathscr{D}_s g \right) &= \left( \partial_t g^{-1} \right) \mathscr{D}_s g + \underbrace{g^{-1} \partial_t \left( \mathscr{D}_s g \right)}_{= \mathscr{D}_t (g^{-1} \mathscr{D}_s g) = 0} \\ &= g^{-1} \mathscr{D}_t \mathscr{D}_s g \\ &= g^{-1} \left[ \mathscr{D}_t, \mathscr{D}_s \right] g \\ &= \mathrm{i} e g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s} \end{aligned}$$

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal

$$\mathscr{D}_t g(s,t) = 0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1] \; .$$

Trick: Schreibe

$$\mathscr{D}_t g = g \partial_t \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \mathscr{D}_t = \partial_t g^{-1}$$

als Operatoridentität.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \partial_t \left( g^{-1} \mathscr{D}_s g \right) &= \left( \partial_t g^{-1} \right) \mathscr{D}_s g + \underbrace{g^{-1} \partial_t \left( \mathscr{D}_s g \right)}_{= \mathscr{D}_t \left( g^{-1} \mathscr{D}_s g \right) = 0} \\
&= g^{-1} \mathscr{D}_t \mathscr{D}_s g \\
&= g^{-1} \left[ \mathscr{D}_t , \mathscr{D}_s \right] g \\
&= \mathrm{i} e g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s}
\end{aligned}$$

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal



$$\mathscr{D}_t g(s,t) = 0 \quad \text{mit} \quad g(s,0) = \mathbb{1} \;\; \forall s \in [0,1]\,.$$

Trick: Schreibe

$$\mathscr{D}_t g = g\partial_t \quad \Rightarrow \quad g^{-1}\mathscr{D}_t = \partial_t g^{-1}$$

als Operatoridentität.

$$\Rightarrow \quad \partial_t\left(g^{-1}\mathscr{D}_s g\right) = \left(\partial_t g^{-1}\right)\mathscr{D}_s g + \underbrace{g^{-1}\partial_t\left(\mathscr{D}_s g\right)}_{=\mathscr{D}_t(g^{-1}\mathscr{D}_s g)=0}$$

$$= g^{-1}\mathscr{D}_t\mathscr{D}_s g$$

$$= g^{-1}\left[\mathscr{D}_t, \mathscr{D}_s\right] g$$

$$= \mathrm{i}e g^{-1}\boldsymbol{G}_{ij}\, g\,\frac{\partial y^i}{\partial t}\,\frac{\partial y^j}{\partial s}$$

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal

$$\partial_t \left( g^{-1} \mathscr{D}_s g \right) = \mathrm{i} e g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s}$$

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal



$$\partial_t \left( g^{-1} \mathscr{D}_s g \right) = \mathrm{i}e g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s}$$

Mit $g^{-1} \mathscr{D}_s g |_{t=0}$ und $g^{-1} \mathscr{D}_s g |_{t=1} = h^{-1} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$ folgt also

$$h^{-1} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \mathrm{i}e \int_0^1 g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s} \, \mathrm{d}t \, .$$

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal



$$\partial_t \left( g^{-1} \mathscr{D}_s g \right) = \mathrm{i}e g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s}$$

Mit $g^{-1}\mathscr{D}_s g|_{t=0}$ und $g^{-1}\mathscr{D}_s g|_{t=1} = h^{-1}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$ folgt also

$$h^{-1}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \mathrm{i}e \int_0^1 g^{-1} \boldsymbol{G}_{ij} g \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s} \, \mathrm{d}t \; .$$

Nur $H$-Felder treten in $h(s)$ auf.

# Quantisierungsbedingung – zum letzten Mal



$$\partial_t \left(g^{-1}\mathscr{D}_s g\right) = \mathrm{i}eg^{-1}\boldsymbol{G}_{ij}g\frac{\partial y^i}{\partial t}\,\frac{\partial y^j}{\partial s}$$

Mit $g^{-1}\mathscr{D}_s g|_{t=0}$ und $g^{-1}\mathscr{D}_s g|_{t=1} = h^{-1}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$ folgt also

$$h^{-1}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \mathrm{i}e\int_0^1 g^{-1}\boldsymbol{G}_{ij}g\frac{\partial y^i}{\partial t}\,\frac{\partial y^j}{\partial s}\,\mathrm{d}t\;.$$

Nur $H$-Felder treten in $h(s)$ auf. Insbesondere für $H = U(1)$ ist

$$h(s) = \exp\left(\mathrm{i}e\int_\Sigma \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)$$

und zum $x$-ten Mal ergibt sich wegen $h(1) = \mathbb{1}$ die

Dirac-Quantisierungsbedingung $\quad \dfrac{eq_{\mathrm{m}}}{4\pi} = \dfrac{n}{2}\,,\quad n\in\mathbb{Z}\;.$

# Zusammenfassung

- magnetische Monopole in klassischer Elektrodynamik nur ad hoc, führen zu Singularitäten

# Zusammenfassung



- magnetische Monopole in klassischer Elektrodynamik nur ad hoc, führen zu Singularitäten
- Eichfeldtheorien mit spontaner Symmetriebrechung lassen Monopole als Lösungen endlicher Energie zu

# Zusammenfassung

- magnetische Monopole in klassischer Elektrodynamik nur ad hoc, führen zu Singularitäten
- Eichfeldtheorien mit spontaner Symmetriebrechung lassen Monopole als Lösungen endlicher Energie zu
- Monopole charakterisiert durch topologische Struktur der Higgs-Felder

# Zusammenfassung



- magnetische Monopole in klassischer Elektrodynamik nur ad hoc, führen zu Singularitäten
- Eichfeldtheorien mit spontaner Symmetriebrechung lassen Monopole als Lösungen endlicher Energie zu
- Monopole charakterisiert durch topologische Struktur der Higgs-Felder
- intrinsische Eigenschaften in konkreten Modellen berechenbar