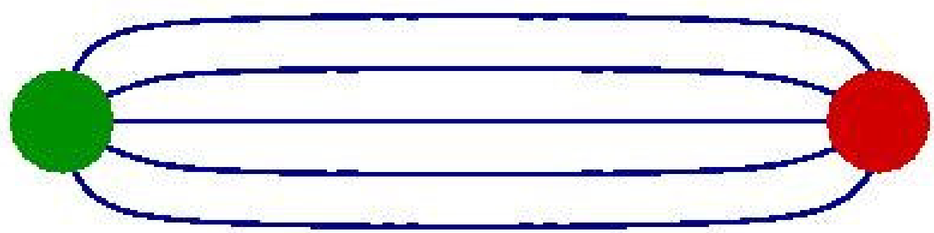
Seminar zur Seiberg-Witten-Theorie

Monopole



Magnus Engenhorst

18. November 2004

Inhalt

Faserbündel

Definition: Ein Faserbündel (E, Π, F, G, X) ist die Einheit von:

1. ein topologischer Raum E (total space)
2. ein topologischer Raum X (Basisraum) und eine Projektion $\Pi : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$
3. ein topologischer Raum F (Faser)
4. eine Gruppe G von Homöomorhpismen der Faser F
5. eine Überlagerungvon X durch offene Koordinatenumgebungen U_α :

$$\phi_\alpha : \Pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F,$$

wobei : $\Pi \phi_\alpha^{-1}(\mathrm{x}, \mathrm{f}) = \mathrm{x}$ mit $\mathrm{x} \in \mathrm{U}_\alpha, \mathrm{f} \in \mathrm{F}$.

Faserbündel

Die Gruppe G

Betrachte den Übergang von lokalen Koordinaten, gegeben durch φ_α, U_α zu einer anderen Wahl von lokalen Koordinaten φ_β, U_β.

Sei $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$. Dann ist:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

Sei nun $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $f \in F$, x fix und nur f könne sich ändern. Dann ist die Abbildung $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ eine Abbildung, genannt $g_{\alpha\beta}(x)$, von F nach F. $g_{\alpha\beta}(x)$ heißt transition Funktion. Die Menge aller solcher Abbildungen formen die Gruppe G.

Faserbündel (Beispiel)

Für jede Mannigfaltigkeit gibt es ein Faserbündel T(M), das Tangentialbündel T(M):

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

Der Basisraum von T(M) ist die Mannigfaltigkeit M, die Faser bei $x \in M$ ist der Tangentialraum $T_p(M)$. Die Projektion Π ist:

$$\Pi\colon T(M) \to M \quad bzw. \quad V \in T_p(M) \mapsto p.$$

Sei $p \in U_\alpha$, $U_\alpha \subset M$ und x^i die lokalen Koordinanten in R^n für U_α. Sei ferner $V \in \Pi^{-1}(U_\alpha)$ ein Tangentialvektor in p:

$$V = a^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

Dann definiere den Homöomorphismus ϕ_α:

$$\phi_\alpha : \Pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times R^n \quad bzw. \quad \mathrm{V} \mapsto (\mathrm{p}, \mathrm{a}^{\mathrm{i}}(p))$$

Prinzipalbündel

Sei (E, Π, F, G, X) ein Faserbündel. Identifiziere die Faser F mit der Gruppe G und erhalte ein „Prinzipalbündel" $P(E)$.

Beispiel: $E=T(M)$, dann ist $P(E)=F(M)$.

Definition: Faserbündel, die globale Produkte zweier Räume sind, heißen triviale Faserbündel.

Definition: Ein Schnitt eines Bündels E ist eine Abbildung $s:X\to E$.

Satz: $P(E)$ und E sind trivial genau dann, wenn $P(E)$ einen Schnitt besitzt.

Mathematischer Hintergrund

- Eichfelder als Prinzipalbündel:

Basisraum ↔ Raumzeit

Strukturgruppe ↔ Eichgruppe

Prinzipalbündel ↔ Eichfelder

Zusammenhang ↔ Eichpotential

Krümmung ↔ Feldstärke

Holonomie ↔ Phasenfaktor

Mathematischer Hintergrund

Eichtransformationen entsprechen den Wechsel von Faserkoordinaten eines Prinzipalbündels.

- Bemerkung zur Holonomie/Phasenfaktor

1. Krümmung ist die Holonomie in einem Punkt.

2. Die Spur über den Phasenfaktor ist der Wilson-Loop in Yang-Mills-Theorien.

Charakteristische Klassen

Vergleiche ein beliebiges Prinzipalbündel der Lie-Gruppe G über eine Mannigfaltigkeit der Dimension d mit einem Bündel ξ(n-k-1, O(k)), das wir universelles (n-k-1)-Bündel nennen. Der Basisraum dieses Bündel ist O(n)/(G x O(n-k)).

Ziel: Finde eine Funktion c, die sagt wie nicht-trivial ein universelles Bündel ist und wie dieses auf das Prinzipalbündel zurückgeworfen wird.

Wir wollen zwei Voraussetzungen:

1. $c(P) = c(P') \Leftrightarrow$ P ist äquivalent zu P'
2. $f^* c(\xi) = c(f^* \xi)$

$\rightarrow$ c(P) für Prinzipalbündel über M ist Element von $\mathrm{H}^{\mathrm{p}}(M, R)$.

Charakteristische Klassen

Kohomologie-Gruppen $H^p(O(n)/G\times O(n-k));R)$

$\mathrm{G} = \mathrm{O(k)}$: Pontrjagin Klassen

$\mathrm{G} = \mathrm{SO(k)}$: zusätzlich Euler Klassen (nur für gerade k nicht null)

$\mathrm{G} = \mathrm{U(k)}$: Chern Klassen

für O(k) Prinzipalbündel: Stiefel-Whitney Klassen

$\rightarrow$ für Kohomologie-Gruppen $\mathrm{H^p(Gr(n,k,R),Z/2)}$

Bemerkung: Sei E = TM

$\mathrm{w}_1(TM) = 0 \Leftrightarrow$ M ist orientierbar

$\mathrm{w}_2(TM) \neq 0 \Rightarrow$ M besitzt keine Spin-Struktur

Für $\mathrm{w}_2(TM) \neq 0$ läßt sich kein Paralleltransport für Spinoren definieren, wegen uneindeutiger Vorzeichen. Die beiden ersten Stiefel-Whitney Klassen müssen vielmehr verschwinden.

Berechnung von Chern-Klassen

Die Chern - Klassen $c_j(F)$ lassen sich aus Polynomen in F,

die invariant unter der Gruppe G sind, konstruieren.

Entwickle in Serien nach t:

$$Det\left(tI + \frac{iF}{2\pi}\right) = \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}(F)t^j$$

Beispiel $G = SU(2)$:

$$F = F^a \frac{\sigma^a}{2i}$$

$$Det\left(tI + \frac{F^a\sigma^a}{4\pi}\right) = t^2 + \frac{t}{2\pi} tr(F^a\sigma^a) + \frac{1}{32\pi^2}(tr(F^a\sigma^a \wedge F^b\sigma^b) - tr(F^a\sigma^a) \wedge tr(F^b\sigma^b))$$

für $SU(2)$ ist $\mathrm{tr}\,\sigma^a = 0$, also:

$$Det\left(tI + \frac{iF}{2\pi}\right) = t^2 - \frac{F^a \wedge F^a}{16\pi^2}$$

bzw. $c_1(P) = 0$ und $c_2(P) = -\frac{1}{16\pi^2} F^a \wedge F^a$.

Der Dirac-Monopol als Eichbündel

Erinnerung : Prinzipalbündel der Gruppe U(1), dem Basisraum S^2 und lokalen Schnitten ψ.

Das Bündel ist eine Kopie zweier Sätze :

$$\{\theta, \phi, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_+}\} \text{ und } \{\theta, \phi, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_-}\}$$

und lokal $S^2 \times S^1$, wobei : $e^{i\psi_-} = e^{in\phi} e^{i\psi_+}$.

Homotope Kurven verharren bei ein und dem selben Prinzipalbündel :

$$\text{U(1) Prinzipalbündel über } \mathrm{S}^2 \leftrightarrow \text{Homotopie} - \text{Klassen in U(1)}$$

Der Monopol ist somit ein Element von $\pi_1(U(1)) = Z$.

Definition : Ein nichtabelscher Monopol ist ein Element von $\pi_1(G)$.

Der Dirac-Monopol als Eichbündel

Wähle als Zusammenhang die 1-Form: $A_\pm + d\psi_\pm$ und somit:

$A_+ = A_- + n\varphi$ mit $A_\pm = n\dfrac{(\pm 1 - \cos\theta)}{2}d\phi.$

Als Krümmungs 2-Form ergibt sich dann:

$$F = dA = \frac{n}{2}\sin\theta d\theta \wedge d\phi.$$

Für $G = U(1)$ verschwindet die erste Chern-Klasse nicht.

$$c_1(F) = \frac{i}{2\pi}TrF \text{ und allgemein: } c_n(F) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \det F.$$

Die erste Chern-Zahl ergibt sich dann als Integral über die erste Chern-Klasse:

$$\int_{S^2}\frac{F}{2\pi} = \int_{+}\frac{F}{2\pi} + \int_{-}\frac{F}{2\pi} = n.$$

Montonen-Olive Vermutung

- Nicht-supersymmetrisch

Eine Eichtheorie ist charakterisiert durch $H \times H^{\vee}$,
durch zwei äquivalente Beschreibungen der Theorie
einmal durch Eichteilchen und einmal durch Monopole.

$\rightarrow$ Dabei erscheint jeweils das Eichteilchen/der
Monopol als Monopol/Eichteilchen (Dualität).

Zwanziger-Schwinger

Verallgemeinerungn der Dirac - Quantisierungsbedingung durch Zwanziger (1968) und Schwinger (1969) :

$$q_1 g_2 - q_2 g_1 = 2\pi n\hbar \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Witten (1979) fand die allgemeine Lösung :

$$\mathrm{q} + \mathrm{ig} = \mathrm{q}_0 (m\tau + n) \qquad \text{für m, n} \in \mathrm{Z},$$

$$\text{wobei} \quad \tau \equiv \frac{\theta}{2\pi} + \frac{2\pi i n_o \hbar}{q_0^2}.$$

Yang-Mills-Higgs zum Zweiten

Yang - Mills - Higgs - Modell :

$$L_{YMH} = -\frac{1}{4} F^{a}_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} D_{\mu}\phi^{a} D^{\mu}\phi^{a}$$

Ergänze den θ - Term :

$$\delta L = -\frac{\theta e^2}{32\pi^2} F^{a}_{\mu\nu} * F^{a\mu\nu}$$

$\rightarrow$ läßt EOM unberührt, aber nicht die Ladung der Dyonen. Wir finden :

$$L = -\frac{1}{16} \operatorname{Im} \tau [F^{a}_{\mu\nu} F^{a\mu\mu} + i F^{a}_{\mu\nu} * F^{a\mu\nu}] - \frac{1}{2e^2} D_{\mu}\phi^{a} D^{\mu}\phi^{a}$$

mit $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{e^2}$, damit wird die BPS Massenformal $M = v[Q_e^2 + Q_m^2]^{1/2}$

mit $Q_e = \mathrm{n_e e} + \frac{\mathrm{e}\theta}{2\pi}\mathrm{n_m}$ zu : $M = v|n_e + n_m \tau|$.

BPS states und Supersymmetrie

1+1-dimensionale supersymmetrische Feldtheorie:

$$L = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2}V^2(\phi) - \frac{1}{2}V'(\phi)\overline{\psi}\psi$$

Es gibt zwei chirale Superladungen:

$$Q_\pm = \int dx(\dot{\phi} \pm \phi')\psi_\pm \mp V(\phi)\psi_\mp$$

Die susy Algebra lautet:

$$Q_+^2 = P_+,\ Q_-^2 = P_-,\ \{Q_+, Q_-\} = T \quad \text{mit } P_\pm = P_0 \pm iP_1 \text{ und T der Zentralladung}$$

Wir finden:

$$2P_0 = P_+ + P_- = (Q_+ + Q_-)^2 - T = (Q_+ - Q_-)^2 + T$$

Also eine Bogomol'nyi Relation:

$$M \geq \frac{1}{2}T.$$

Allgemein gilt für eine susy Algebra: $M \geq k|Z|$.

S-Dualität in N=4 SYM

N = 4 Super Yang - Mills

bosonischer Teil der Wirkung :

$$S = -\frac{1}{16\pi}\operatorname{Im}\int \tau Tr(F^2 + iF * F) - \frac{1}{2e^2}\int [TrD\phi^I D\phi^I + V(\phi^I)]$$

mit dem Potential $\mathrm{V}(\phi^{\mathrm{I}}) = \sum_{1 \le I \le J \le 6} Tr[\phi^I, \phi^J]^2$

Eine N = 4 SYM ist durch G, $< \varphi^{\mathrm{I}} >$ und τ festgelegt, es gibt keine Quantenkorrekturen zum Moduliraum der Vakua : $\mathrm{V}(\phi^{\mathrm{I}}) = 0, [\phi^{\mathrm{I}}, \phi^{\mathrm{J}}] = 0.$

Es gibt je sechs magnetische und elektrische Ladungen, als Zentralladungen der N = 4 susy Algebra :

$$Q_e^I = \frac{1}{ev}\int dS \cdot Tr(E\phi^I)$$

$$Q_m^I = \frac{1}{ev}\int dS \cdot Tr(B\phi^I),$$

wobei für BPS states :

$$M^2 = \frac{v^2}{e^2}[(Q_e^I)^2 + (Q_m^I)^2] \text{ bzw. wegen } \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(1) : M = v|n_e + n_m\tau|.$$

S-Dualität in N=4 SYM

Vermutung: Die N=4 Super Yang-Mills-Theorie ist exakt s-dual.

$SL(2,Z)$ transformationen :

$$\tau \rightarrow \frac{\mathrm{a}\tau+\mathrm{b}}{\mathrm{c}\tau+\mathrm{d}}, \qquad \mathrm{a,b,c,d} \in \mathrm{Z}, \mathrm{ad - bc} = 1$$

$$(n_m, n_e) \rightarrow (n_m, n_e) \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}^{-1}$$

Die Generatoren der SL(2, Z) - Gruppe sind :

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1$$

$$S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$$

Für einen verschwindenden θ - Term ist die S - Dualität bzw. die elektromagnetische Dualität exakt.

S-Dualität in N=4 SYM

Tests der Dualität:

1. Witten Index

$$index_W = n_d - n_f = tr(-1)^{N_f} =: str(e^{-i\beta H})$$

$$\mathrm{N_f} : \text{Teilchenzahl-Operator für Fermionen für } \mathrm{E} = 0$$

$$index_W = \begin{cases} 1 & \text{susy exakt} \\ 0 & \text{susy gebrochen} \end{cases}$$

Für K3 berechnet: Ergebnis kovariant unter SL(2, Z) Dualität.

S-Dualität in N=4 SYM

2. Stringtheorie

Die S-Dualität der N=4 SYM ist in der Stringtheorie eine T-Dualität, die als perturbative Dualität leichter zugänglich ist.

3.

$$\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

Zeige, dass die supersymmetrische Quantenmechanik auf komplexen Mannigfaltigkeiten (dem Moduliraum der Dyonen) normalisierte Grundzustände Besitzt. Dies wurde mit Erfolg getan.

1-dim. Quanten-Antiferromagneten

Bosonisierung:

$$[j_0(x), j_1(x')] = \underbrace{-\frac{i}{\pi}\partial_x \delta(x-x')}_{\text{Schwinger-Term (in 1+1 Dimensionen endlich)}}$$

$$[j_0(x), j_0(x')] = [j_1(x), j_1(x')] = 0$$

Definiere: $[\phi(\mathrm{x}), \Pi(\mathrm{x}')] = \mathrm{i}\delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}')$ und

identifiziere: $\mathrm{j}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x \phi(x)$

$$\mathrm{j}_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_t \phi(t) \equiv -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Pi(x)$$

$$\frac{1}{\pi}[\partial_x \phi(x), \Pi(x')] = -\frac{1}{\pi}\delta'(x-x') \text{ oder } \mathrm{j}_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu \phi.$$

1-dim. Quanten-Antiferromagneten

Dualität: Dirac ↔ Sine-Gordon Modell

1. Verhalten sich wie Eichteilchen/Soliton und vice versa zueinander.
2. Beziehung zwischen Kopplungen wie in S-Dualität:

$$\beta^2 = \frac{16\pi}{1 + \frac{2\gamma}{\pi}}$$

Dualität in der 2-dim. QCD

$$\text{z.B.}[j_0^a(x), j_1^b(y)] = if^{abc} j_{1f}^c(x)\delta(x-y) + \frac{i}{2\pi}\delta^{ab}\partial_x\delta(x-y)$$

Dualität zwischen dem massiven Thirring-Modell und dem Sine-Gordon-Modell:

$$g = \pi\left(\frac{4\pi}{\beta^2} - 1\right) \quad \text{mit} \quad \beta = 2\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{N}}} : \text{Kopplung Sine-Gordon-Modell}$$

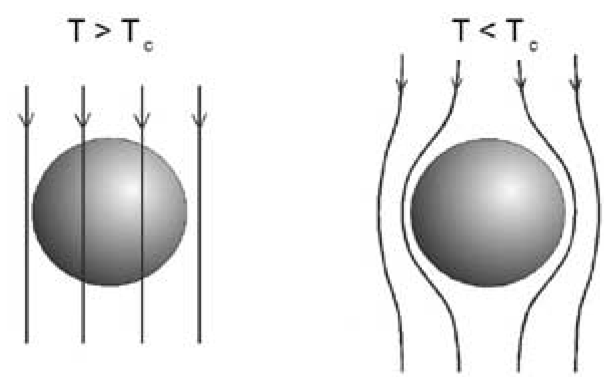
Montonen-Olive Derivate

- Dualität zwischen Vektormesonen und Solitonen in der color flavour locked (CFL) Phase der QCD

$$m_{Vektormeson} \propto \frac{1}{m_{Soliton}}$$

Monopolkondensation und Confinement

Idee entliehen aus der Theorie der Supraleitung
→ alle guten Ideen werden stets recycled



Meißner-Effekt

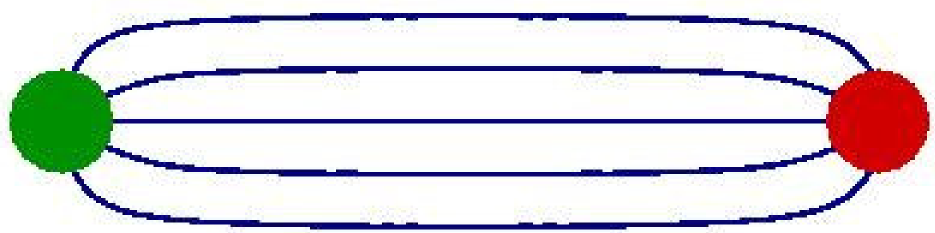
Monopolkondensation und Confinement

1. Abelsches Higgs-Modell der Supraleitung führt zu einem Flux-Quantum (Nielson-Oleson String)

2. Um unendliche Energie zu kompensieren, führe Monopol ein, was sich nur durch ein Monopol-Antimonopol Paar realisieren läßt.

Zwischen diesen wirkt ein lineares Potential V(r)~r: → Confinement!

Idee (t'Hooft 1974): Das color Vakuum ist supraleitend, dann sind die Quarks in Mesonen und Baryonen (und Pentaquark?) confined. Im Gegensatz zu oben müssen aber elektrische und magnetische Felder die Rollen tauschen.



Zusammenfassung

- Eichfelder als Prinzipalbündel
- BPS states
- Monopole und Dualitäten finden sich in zahlreichen Modellen
- → Zusammenhang zwischen verschiedenen Dualitäten?
- Confinement kann durch Theorien mit Monopolen (bisweilen) erklärt werden

Diskussion

Was ist der Zusammenhang zwischen der elektromagnetischen Dualität, der S-Dualität und der „Super-Dualität“?

Was ist der Zusammenhang mit der Stringtheorie und ferner mit logarithmischen konformen Feldtheorien?

Literatur

C. Nash: Topology and Geometry for Physicists, London 1983.

M. Nakahara: Geometry, Topology, and Physics, Bristol 1990.

B. Felsager: Geometry, Particles, and Fields, New York 1997.

E. Fradkin: Field Theories of Condensed Matter Systems, Massachusetts 1991.

D. Olive/P. West: Duality and Supersymmetric Theories, Cambridge 1999.

D. Zeppenfeld: Hadronen in der zweidimensionalen QCD, Diss., München 1984.