

Einführung in die Seiberg Witten Theorie

Holger Eberle

Überblick

Ziel: Exakte Beschreibung der niederenergetischen effektiven Wirkung für eine $N = 2$ Eichtheorie

Ingredienzien:

- Eine in ihrer Form hochgradig festgelegte $N = 2$ SUSY Wirkung, deren QFT asymptotisch frei ist
- Nichtperturbative Effekte wie Monopole, Dyonen, Instantonen

Methode:

- Analyse von Feldkonfigurationen und Symmetrien der **klassischen Wirkung**
- Indirekte Bestimmung des **perturbativen Quantenregimes** mittels Analyse der Anomalien
- **Exakte Lösung** durch Dualität und Monodromie

Klassische Betrachtung

Die Wirkung der $N = 2$ SUSY Yang-Millstheorie ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{g^2} \text{tr} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g^2 \frac{\theta}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + (D_\mu A)^\dagger (D^\mu A) \right. \\ & - \frac{1}{2} [A^\dagger, A]^2 - i\lambda\sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda} - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi \\ & \left. - i\sqrt{2}[\lambda, \psi] A^\dagger - i\sqrt{2}[\bar{\lambda}, \bar{\psi}] A \right) , \end{aligned}$$

mit Invarianzgruppe G .

Diese liefert für das Higgsfeld $\phi := A$ das Potential

$$V(\pi) = \frac{1}{2g^2} \text{tr}([\phi^\dagger, \phi]^2) .$$

Klassische Betrachtung (2)

Folglich ist das **Higgsvakuum** $V(\phi) = 0$ gegeben durch

$$[\phi^\dagger, \phi]^2 = 0 .$$

Dies wird erfüllt durch $\phi \in \mathfrak{h}$, der **Cartanunteralgebra**.

Frage: Beschreiben alle diese $\phi \in \mathfrak{h}$ unabhängige Vakua?

Die Eichtransformationen G (bzw. G/H , $H = \exp(\mathfrak{h})$) transformieren zwischen physikalisch äquivalenten Theorien.

Diese enthalten als zusätzliche Automorphismen der Cartanunteralgebra die **Weylspiegelungen**.

\Rightarrow Parametrisierung durch **weylinvariante Funktionen** $f(\phi)$

Klassische Betrachtung (3)

Weylinvarianten werden generiert durch

$$\det(\lambda \mathbb{1} - \phi) = 0$$

(denn: Weylspiegelungen wirken als Konjugation auf ϕ).

Die Entwicklung liefert die sogenannten **Chernklassen von ϕ** :

$$\begin{aligned} \det(\lambda - \phi) &= \lambda^N \det(1 - \phi/\lambda) = \lambda^N \exp(\text{tr}(\ln(1 - \phi/\lambda))) \\ &= \lambda^N - \frac{1}{2} \text{tr}(\phi^2) \lambda^{N-2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\phi^3) \lambda^{N-3} + \dots \\ &=: \lambda^N - \lambda^{N-1} c_1(\phi) + \lambda^{N-2} c_2(\phi) - \lambda^{N-3} c_3(\phi) - \\ &\quad \dots + (-1)^N c_N(\phi) . \end{aligned}$$

Klassische Betrachtung (4)

Beispiele: Seien a_1, \dots, a_N die Eigenwerte von ϕ . Für $G = \text{SU}(N)$ gilt $\text{tr}(\phi) = \sum a_i = 0$.

- $\text{SU}(2)$: Aus $\phi = \frac{1}{2}a\sigma_3$ folgt direkt $u = \text{tr}(\phi^2) = \frac{1}{2}a^2$.
- $\text{SU}(3)$: Es gibt zwei Weylinvarianten

$$u = \frac{1}{2}\text{tr}(\phi^2) = -(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$$

$$v = -\frac{1}{3}\text{tr}(\phi^3) = -a_1a_2a_3 .$$

Übergang zur QFT:

- Vakuumerwartungswerte als Parameter, z.B.
 $u = \langle \text{tr}(\phi^2) \rangle$
- Quantenkorrekturen zur Wirkung.

R-Symmetrie

R-Symmetrie = globale $U(N)$ Rotation der N Superladungen.

$N = 1$: $U(1)_{\mathcal{R}}$ wirkt auf den Superladungen wie

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} - i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\theta}^{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \quad \rightarrow \quad e^{-i\alpha} Q ,$$

und damit auf den Koordinaten

$$\theta \rightarrow e^{i\alpha} \theta \quad \tilde{\theta} \rightarrow e^{-i\alpha} \tilde{\theta} .$$

$N = 2$: $U(2)_{\mathcal{R}} = U(1)_{\mathcal{R}} \times SU(2)_{\mathcal{R}}$

- $U(1)_{\mathcal{R}}$ wirkt wie oben.
- $SU(2)_{\mathcal{R}}$ transformiert die Indizes der Superladungen.

R-Symmetrie (2)

Beispiel: $N = 2$ Vektormultiplett

$$\begin{array}{ccc} & A_\mu & \\ \lambda & & \psi \\ & \phi & \end{array}$$

$SU(2)_{\mathcal{R}}$ rotiert (λ, ψ) in sich und läßt A_μ und ϕ invariant.

$N = 1$ **Betrachtung:** $U(1)_J \subset SU(2)_{\mathcal{R}}$, erzeugt durch σ_3 , bleibt manifest

$$(\lambda, \psi) \xrightarrow{U(1)_J} (e^{i\alpha} \lambda, e^{-i\alpha} \psi) .$$

R-Symmetrie (3)

Wirkung von $U(1)_{\mathcal{R}}$ und $U(1)_J$ auf die Komponentenfelder von **Vektormultiplett** $(A_\mu, \lambda, \psi, \phi)$ und **Hypermultiplett** $(\psi_q, q, \tilde{q}^\dagger, \tilde{\psi}_q^\dagger)$

$$\begin{array}{llll}
 U(1)_{\mathcal{R}} : & \phi & \longrightarrow & e^{2i\alpha} \phi \\
 & (\psi, \lambda) & \longrightarrow & e^{i\alpha} (\psi, \lambda) \\
 & (\psi_q, \tilde{\psi}_q^\dagger) & \longrightarrow & e^{-i\alpha} (\psi_q, \tilde{\psi}_q^\dagger) \\
 & (A_\mu, q, \tilde{q}^\dagger) & \longrightarrow & (A_\mu, q, \tilde{q}^\dagger)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 U(1)_J : & (\lambda, q) & \longrightarrow & e^{i\alpha} (\lambda, q) \\
 & (\psi, \tilde{q}^\dagger) & \longrightarrow & e^{-i\alpha} (\psi, \tilde{q}^\dagger) \\
 & (\phi, A_\mu, \psi_q, \tilde{\psi}_q^\dagger) & \longrightarrow & (\phi, A_\mu, \psi_q, \tilde{\psi}_q^\dagger).
 \end{array}$$

R-Symmetrie (4)

Fasse nun λ und ψ zu einem **Diracspinor** ψ_D zusammen

$$\begin{aligned}\psi_D &\xrightarrow{U(1)_J} e^{i\alpha} \psi_D \\ \psi_D &\xrightarrow{U(1)_R} e^{i\alpha \gamma_5} \psi_D .\end{aligned}$$

$U(1)_R$ wirkt also als **chirale Symmetrie** und induziert eine **chirale Anomalie** in der zugehörigen QFT.

Eine analoge chirale Anomalie erhält man für den Diracspinor $(\psi_q, \tilde{\psi}_q^\dagger)$.

Bemerkung: Die chirale Anomalie ist ein Instantoneffekt. Für $SU(2)$ wird $U(1)_R \times SU(2)_R$ gebrochen zu

$$(SU(2)_R \times \mathbb{Z}_4) / \mathbb{Z}_2 .$$

Perturbative Niederenergiwirkung

Eigentliches Vorgehen: Nehme die exakte mikroskopische Theorie und **integriere alle massiven** wie masselosen Moden oberhalb eines Cutoffs aus (Wilsonsche Wirkung).

→ schwierig ...

Indirektes Vorgehen: Die $N = 2$ SUSY bleibt auch in der Niederenergiethorie manifest. Wir kennen aber die **allgemeinste Form einer $N = 2$ SUSY Lagrangedichte**

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4\pi} \text{Im} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \mathcal{F}(\Psi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A^i} \bar{A}^i + \int d^2\theta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial A^i \partial A^j} W^{\alpha i} W_{\alpha}^j \right] \\ &\quad + \text{höhere Ableitungen} .\end{aligned}$$

Perturbative Niederenergiwirkung (2)

Ziel ist es, einschränkende Bedingungen zu finden, die das **Präpotential \mathcal{F} eindeutig festlegen**.

→ hat Seiberg & Witten zum Erfolg geführt!

Bemerkung:

- Man kann die **skalare Komponente a_i** des chiralen Superfeldes A_i als **Koordinatenfeld** auffassen. Aus \mathcal{L} folgt die Metrik auf dem Raum der Higgsvakua

$$ds^2 = g_{i\bar{j}} da^i d\bar{a}^{\bar{j}} = \text{Im} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^i \partial \bar{a}^{\bar{j}}} da^i d\bar{a}^{\bar{j}} .$$

- Diese Darstellung der Metrik beweist, dass sie **Kähler** ist, mit Kählerpotential $K = \text{Im}(\bar{A}_i \partial \mathcal{F}(A) / \partial A_i)$.
- $N = 2$ SUSY \implies Metrik und Eichkopplung sind gleich.

Perturbative Niederenergiwirkung (3)

Wir betrachten nun konkret den $SU(2)$ Fall.

Lagrangedichte und Metrik lauten dann

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A} \bar{A} + \int d^2\theta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial A^2} W^\alpha W_\alpha \right]$$

$$ds^2 = \text{Im}(\tau) da d\bar{a} \quad \text{mit } \tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2},$$

wobei sich die **Kopplung** g aus τ wie in der klassischen SUSY Wirkung ergibt

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g^2}.$$

Perturbative Niederenergiwirkung (4)

Wir wollen nun die $N = 2$ QFT **perturbativ analysieren**.

- Die mikroskopische Theorie ist **asymptotisch frei**; folglich kann man die perturbative Analyse für hohe Energien anwenden.
- Die einzige **Einschleifenkorrektur** wird durch die chirale Anomalie verursacht. (einziger Beitrag zur β Funktion)
- Ein Nichtrenormierungstheorem besagt, dass es **keine höheren Schleifenkorrekturen** gibt. (keine weiteren Beiträge zur β Funktion)

Analyse der chiralen Anomalie

Die **chirale Anomalie** lautet

$$\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{N_c}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} .$$

Unter $U(1)_{\mathcal{R}}$ ändert sich die Lagrangedichte folglich um

$$\delta\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{\alpha N_c}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} .$$

Bemerkung:

- Da $(32\pi^2)^{-1} \int F \tilde{F}$ in \mathbb{Z} ist, bricht die Anomalie $U(1)_{\mathcal{R}}$ zu \mathbb{Z}_{4N_c} . Die Transformationseigenschaften von ϕ^2 führen dann zum weiter oben erwähnten Ergebnis.
- Wir nutzen im folgenden eine $U(1)_{\mathcal{R}}$ Transformation, um den **θ Winkel auf 0** zu setzen.

Analyse der chiralen Anomalie (2)

Vergleichen wir nun den $U(1)_{\mathcal{R}}$ transformierten \mathcal{L}_{eff} (LHS, nur relevante Terme) und die Änderung durch die chirale Anomalie (RHS)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi^2} \text{Im} \left[\mathcal{F}''(e^{2i\alpha} A)(-FF + iF\tilde{F}) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \text{Im} \left[\mathcal{F}''(A)(-FF + iF\tilde{F}) \right] - \frac{\alpha N_c}{8\pi^2} F\tilde{F} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}''(e^{2i\alpha} A) &= \mathcal{F}''(A) - \frac{2\alpha N_c}{\pi} . \\ \xrightarrow{\text{infi nitesimal}} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial A^3} &= \frac{N_c}{\pi} \frac{i}{A} . \end{aligned}$$

Analyse der chiralen Anomalie (3)

Dies integriert sich zum einschleifenkorrigierten Präpotential

$$\mathcal{F}_{1\text{-Schleife}} = \frac{i}{\pi} A^2 \ln \frac{A}{\Lambda},$$

wobei Λ als Integrationskonstante die typische Cutoffskala (z.B. Λ_{QCD}) der Theorie angibt.

Der einzige bisher nicht berücksichtigte Effekt sind **Instantonkorrekturen**. Diese führen zum folgenden korrigierten Präpotential

$$\mathcal{F} = \frac{i}{\pi} A^2 \ln \frac{A}{\Lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \left(\frac{\Lambda}{A} \right)^{4k} A^2,$$

wobei k die Instantonzahl angibt.

Analyse der chiralen Anomalie (4)

Frage: Können wir die gerade gewonnene Lösung auf den ganzen Modulraum ausdehnen?

Betrachte die Metrik $\text{Im } \tau$ für großes $|a|$ mit

$$\tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} = \frac{i}{\pi} \left(2 \ln \frac{a}{\Lambda} + 3 \right) .$$

$\text{Im } \tau(a)$ ist **einwertig**, hat jedoch als harmonische Funktion **kein globales Minimum**.

⇒ $\text{Im } \tau$ ist nicht überall positiv.

⇒ Aus der Positivität der kinetischen Energie folgt, dass $\tau(a)$ **nur lokal definiert** ist.

Dualität

Betrachte die Dualitätstransformation auf dem **bosonischen Eichfeldanteil** an der Wirkung

$$\frac{1}{32\pi^2} \text{Im} \int d^4x \tau(a) (F + i\tilde{F})^2 = \frac{1}{16\pi^2} \text{Im} \int d^4x \tau(a) (F^2 + i\tilde{F}F)$$

(mit Konventionen $(F_{\mu\nu})^2 = -(\tilde{F}_{\mu\nu})^2$, $\tilde{\tilde{F}} = -F$).

Wir addieren den folgenden **Lagrangemultiplikatorterm**

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int d^4x V_{D\mu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} &= \frac{1}{8\pi} \int d^4x \tilde{F}_D F \\ &= \frac{1}{8\pi} \text{Im} \int d^4x (F_D + i\tilde{F}_D) (F + i\tilde{F}), \end{aligned}$$

mit $F_{D\mu\nu} = \partial_\mu V_{D\nu} - \partial_\nu V_{D\mu}$.

Dualität (2)

Diesen Zusatzterm kann man auf zwei Arten betrachten:

- Die **Bianchiidentität** $dF = 0$ wird explizit implementiert.
- Wir führen ein neues Feld V_D ein, das an einen **magnetischen Monopol** $\epsilon^{0\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 8\pi\delta^{(3)}(x)$ (als Quelle) koppelt.

Quadratische Ergänzung und Integration über den Gaussfaktor in F führen auf die **duale Wirkung**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32\pi^2} \text{Im} \int d^4x \left(-\frac{1}{\tau(a)} \right) (F_D + i\tilde{F}_D)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \text{Im} \int d^4x \left(-\frac{1}{\tau(a)} \right) (F_D^2 + i\tilde{F}_D F_D) . \end{aligned}$$

Dualität (3)

Betrachte dieselbe Dualität in der $N = 1$ Sprache. Die Ursprungswirkung ist

$$\frac{1}{8\pi} \operatorname{Im} \int d^4x d^2\theta \tau(a) W^2 .$$

Implementiere die Bianchiidentität für das chirale Feld W , $\operatorname{Im} \mathcal{D}W = 0$, mittels

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \int d^4x d^2\theta V_D (\mathcal{D}W) &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \int d^4x d^2\theta (\mathcal{D}V_D) W \\ &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \int d^4x d^2\theta W_D W . \end{aligned}$$

Dualität (4)

Durch Quadratische Ergänzung und Integration über W erhält man die **duale Wirkung**

$$\frac{1}{8\pi} \operatorname{Im} \int d^4x d^2\theta \left(-\frac{1}{\tau(a)} W_D^2 \right) .$$

Die Dualitätstransformation führt also zu

- **Invertierung der Eichkopplung** $\tau_D = -\frac{1}{\tau(a)}$
- **Kopplung der dualen Eichfelder an magnetische Ladungen** (anstelle der Eichfelder an elektrische).

Da die Wirkung ebenfalls **invariant unter** $\tau \mapsto \tau + 1$ ist, ergibt sich als **volle Dualitätsgruppe** $SL(2, \mathbb{Z})$

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad ad - bc = 1; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} .$$

Dualität (5)

Wir wollen nun aus der Dualität für Eichfelder mittels $N = 2$ SUSY die **duale Beschreibung der skalaren Felder** bestimmen.

Führe die „konjugierte“ Variable

$$h(A) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A} \quad \Rightarrow \quad \tau(A) = \frac{\partial h(A)}{\partial A}$$

sowie die korrespondierenden dualen Variablen A_D , \mathcal{F}_D , $h_D(A_D)$ ein.

Die Transformation $\tau_D = -\frac{1}{\tau(a)}$ impliziert dann

$$A_D = h = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A} \quad h_D = -A .$$

Dualität (6)

Denn so behält der **kinetische Term der Skalarfelder** sein Form

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \int d^4\theta h(A) \bar{A} &= \frac{1}{2i} \int d^4\theta (h(A) \bar{A} - \overline{h(A)} A) \\ &= \operatorname{Im} \int d^4\theta \bar{A}_D h_D(A_D) .\end{aligned}$$

Die **Dualitätsgruppe** $SL(2, \mathbb{Z})$ wirkt folglich auf A und \mathcal{F} gemäß

$$\begin{pmatrix} A_D \\ A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{A}_D \\ \hat{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_D \\ A \end{pmatrix} .$$

Dualität (7)

Diese Transformation

$$\alpha A_D + \beta A = \hat{A}_D = \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \hat{A}}$$

lässt sich zu $\hat{\mathcal{F}}$ integrieren

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}} &= \int dA (\alpha A_D + \beta A) \left(\gamma \frac{\partial A_D}{\partial A} + \delta \right) \\ &= \int dA \left(\alpha \gamma A_D \frac{\partial A_D}{\partial A} + \beta \delta A + \beta \gamma \left(A \frac{\partial A_D}{\partial A} + A_D \right) \right. \\ &\quad \left. - \beta \gamma A_D + \alpha \delta A_D \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \gamma A_D^2 + \frac{1}{2} \beta \delta A^2 + \beta \gamma A A_D + \mathcal{F} . \end{aligned}$$

Dualität (8)

Damit wissen wir ebenfalls, wie sich die **skalaren Komponentenfelder** a und a_D transformieren, und können die Metrik umschreiben zu

$$\begin{aligned} ds^2 &= \operatorname{Im}(\tau) da d\bar{a} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial a_D}{\partial a} - \frac{\partial \bar{a}_D}{\partial \bar{a}} \right) da d\bar{a} \\ &= \frac{1}{2i} (da_D d\bar{a} - da d\bar{a}_D) = \operatorname{Im} da_D d\bar{a} . \end{aligned}$$

- ds^2 ist **invariant unter** $SL(2, \mathbb{Z})$.
- Sei u holmorphe Koordinate auf dem Modulraum \mathcal{M} , (a_D, a) Koordinaten auf $X \cong \mathbb{C}^2$ mit symplektischer Form $\omega = \operatorname{Im} da_D \wedge d\bar{a}$.
Dann ist $(a_D(u), a(u))$ als **Abbildung** $\mathcal{M} \rightarrow X$ ein **Schnitt des** $SL(2, \mathbb{Z})$ **Bündels** X **über** \mathcal{M} .
- Für Gruppen vom Rang r lautet die Dualitätsgruppe $Sp(2r, \mathbb{Z})$.

Massenspektrum

Die **BPS Grenze** ist wie immer durch

$$M \leq \sqrt{2} |Z|$$

gegeben, wobei das klassische $Z = a(n_e + \tau_{\text{cl}} n_m)$ in die allgemeinere Form

$$Z = a n_e + a_D n_m \quad (1)$$

übergeht.

Für ein **massives Hypermultiplett** mit elektrischer Ladung n_e diktiert $N = 2$ SUSY die Kopplung der chiralen $N = 1$ Komponenten M, \tilde{M} an das chirale Eichfeld A

$$\sqrt{2} n_e A M \tilde{M} .$$

Daraus folgt der elektrische Anteil von Gleichung (1).

Massenspektrum (2)

Bemerkung:

- Das SUSY Spektrum sollte invariant sein unter jeglicher Monodromie, folglich auch Z .
Transformiert also $(a_D, a)^t \mapsto M (a_D, a)^t$, dann muss der **Ladungsvektor** (n_m, n_e) mit M^{-1} transformieren.
- Die Monodromie der Kopplungen bzw. der Ladungen ist ähnlich den **Monodromien der Periodenmatrizen Riemannscher Flächen**. Folglich liegt es nahe, den Modulraum \mathcal{M} über den Parameterraum Riemannscher Flächen zu beschreiben.

... doch dazu müssen wir noch mehr über die Monodromiegruppe lernen.

Monodromie

Monodromie um $u = \infty$: Im bisher betrachteten Grenzfall des **asymptotisch freien Bereichs** bei $|a| \gg 0$ gelten die Parametrisierungen

$$u = \frac{1}{2} a^2$$
$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = \frac{2ia}{\pi} \ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) + \frac{ia}{\pi} \quad (\mathcal{F} = i/\pi a^2 \ln(a/\Lambda)) .$$

Aus $\ln u \mapsto \ln u + 2\pi i$ bzw. $\ln a \mapsto \ln a + \pi i$ folgt

$$a_D \mapsto -a_D + 2a$$

$$a \mapsto -a ,$$

sowie die **Monodromiematrix**

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Monodromie (2)

Frage: Welche Singularitäten gibt es nun im Modulraum?

- Wäre die Monodromiegruppe abelsch, so wäre a^2 global eine gute Koordinate. Dies kann aber nicht sein, da die Metrik und damit die kinetische Energie nicht überall positiv ist.
- Eine nur zweielementige Monodromiegruppe ist immer abelsch (es sind dieselben Monodromien). Folglich hat die **Monodromiegruppe mindestens drei Elemente**. Wir gehen im folgenden von dreien aus.
- Die Singularitäten werden durch die gebrochene **Symmetrie** $u \mapsto -u$ ineinander abgebildet.

Monodromie (3)

Frage: Woher kommen die Singularitäten?

- Unser Vorgehen implizierte das Ausintegrieren der massiven Zustände. Da die Massen aber von u abhängen, gibt es Punkte in \mathcal{M} , an denen diese Zustände masselos werden. **Masselose Zustände auszuintegrieren produziert Singularitäten.**
- Kandidaten für masselos werdende Zustände sind die massiven Eichbosonen aus dem Higgseffekt. Man kann jedoch argumentieren, dass dies nicht zu einem konsistenten Bild führt.
- Folglich bleiben nur die durch Hypermultipletts beschriebenen **Monopole und Dyonen** als Kandidaten.

Monodromie (4)

Vorgehen für nichtperturbative Singularitäten:

- Wir nehmen einfach an, dass an zwei Punkten in \mathcal{M} , u_0 und $-u_0$ Dyonen masselos werden und damit Singularitäten verursachen.
- Wir **fixieren die Renormierungsvorschrift durch $\Lambda = 1$** , da wir so o.B.d.A. $u_0 = 1$ setzen können.
- Da wir nur wissen, wie wir elektrische Ladungen lokal koppeln können, **nutzen wir die Dualität**, Dyonen auf Ladung $(0, n_e)$ zu transformieren.
- Die **Konsistenzgleichung der Monodromien** $M_\infty = M_1 M_{-1}$ liefert die letzten Einschränkungen.

Zunächst brauchen wir aber $\tau(a)$ für eine $U(1)$ Theorie an die ein zusätzliches masseloses Hypermultiplett gekoppelt ist.

Interludus – $U(1)$ β -Funktion

Die Standard $U(1)$ β -Funktion für Weylfermionen mit Ladung Q_f und komplexen Skalaren mit Ladung Q_s lautet

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left(\sum_f \frac{2}{3} Q_f^2 + \sum_s \frac{1}{3} Q_s^2 \right) .$$

Das **Hypermultiplett** besteht aus **zwei Weylfermionen und zwei komplexen Skalaren zur selben Ladung Q** . Außerdem gilt wegen $\theta = 0$: $\tau = 4\pi i/g^2$. Damit haben wir

$$\mu \frac{d\tau}{d\mu} = -\frac{i}{\pi} Q^2 .$$

Setze $Q = 1$ und $\mu = a$ (typische Skala!), dann

$$\tau \simeq -\frac{i}{\pi} \ln \frac{a}{\Lambda} .$$

Monodromie (5)

Betrachte einen **singulären Punkt** q , an dem ein BPS Zustand mit $(n_m, n_e) = (0, 1)$ masselos wird. Dann gilt $a(q) = 0$ und $a \approx c_q(u - u_q)$ nahe $a(q)$.

Aus der Einschleifen $U(1)$ β -Funktion folgt

$$a_D(q) = -\frac{i}{\pi} a(q) \ln \frac{a(q)}{\Lambda} + \frac{i}{\pi},$$

und folglich für $(u - u_q) \mapsto e^{2\pi i}(u - u_q)$

$$a_D(q) \mapsto a_D(q) + 2a(q)$$

$$a(q) \mapsto a(q).$$

Monodromie (6)

Mittels Dualität bildet man ein beliebiges Dyon mit (n_m, n_e) auf den obigen Fall ab und erhält die Monodromie

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 2n_e n_m & 2n_e^2 \\ -2n_m^2 & 1 - 2n_e n_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} .$$

Betrachtet man nun $u = \pm 1$ liefert $M_1(m, n) M_{-1}(m', n') = M_\infty$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + mn &= m'n' + 2m'^2 \\ m^2 &= m'^2 \\ n^2 &= n'^2 + 1 + 2m'n' \\ 1 - mn &= -m'n' . \end{aligned}$$

Monodromie (7)

Folgende **Lösungen des Gleichungssystems** sind möglich

$$\begin{array}{l} (m, n) \\ (m', n') \end{array} \left| \begin{array}{cccc} (1, n) & (-1, n) & (-1, n) & (1, n) \\ (1, n-1) & (1, -n-1) & (-1, n+1) & (-1, -n+1) \end{array} \right. .$$

Die **einfachste Lösung**, mit der wir im folgenden arbeiten werden, ergeben $m = m' = 1, n = 0, n' = -1$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

- M_1 entspricht einem Monopol, der an $u = 1$ masselos wird,
- M_{-1} einem $(1, -1)$ Dyon, das an $u = -1$ masselos wird.

Exakte Lösung

Wir wissen bisher über \mathcal{M}

- \mathcal{M} ist die **komplexe u -Ebene** mit **Singularitäten** an $1, -1, \infty$ sowie **\mathbb{Z}_2 -Symmetrie** $u \mapsto -u$.
- Diese „gepunktete“ Ebene trägt ein **flaches $SL(2, \mathbb{Z})$ Bündel V** mit Schnitt (a_D, a) und Monodromien

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

- Die „gepunktete“ u -Ebene ergibt sich als **Quotient der oberen Halbebene \mathcal{H}** durch die von den obigen Monodromien erzeugte **Gruppe $\Gamma(2)$** .

Exakte Lösung (2)

Aufgabe: Identifikation von \mathcal{M} mit dem Modulraum Riemannscher Flächen vom Geschlecht 1, deren Homologiezykel gerade die Monodromien des $SL(2, \mathbb{Z})$ Bündels V aufweisen.

Lösung: Die Parameterschar der Kurven E_u

$$y^2 = (x - 1)(x + 1)(x - u)$$

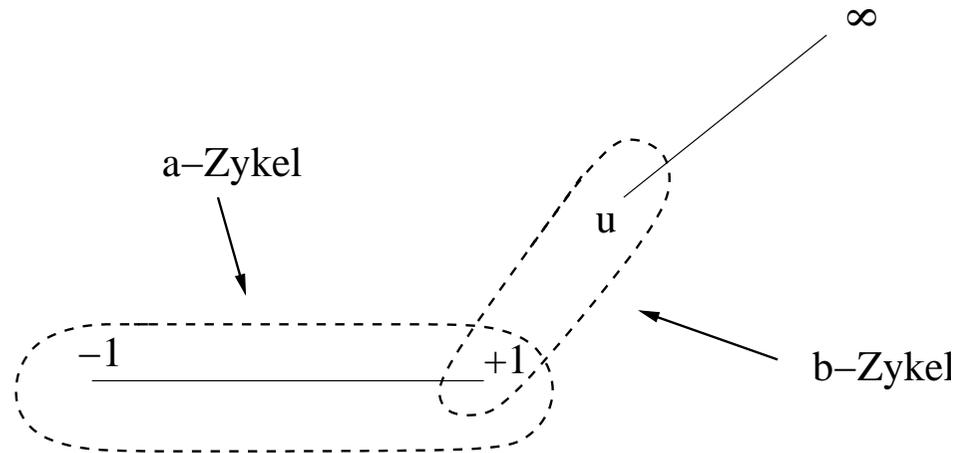
hat genau die Eigenschaften

- Invarianz unter $\mathbb{Z}_4: \{u \mapsto -u, x \mapsto -x, y \mapsto \pm iy\}$; diese wirkt auf u nur als \mathbb{Z}_2 ;
- Modulraum $H/\Gamma(2)$, folglich Monodromiegruppe $\Gamma(2)$.

Exakte Lösung (3)

Wie sieht E_u aus?

$$y^2 = (x - 1)(x + 1)(x - u)$$



Folglich handelt es sich um eine Schar von **Tori**.

Bemerkung: Fallen zwei beliebige **Verzweigungspunkte zusammen**, wird die Kurve **singulär**.

Exakte Lösung (4)

Geometrie des Torus: Wähle eine normalisierte **Basis der Homologie** $H_1(E_u, \mathbb{C})$ (γ_1, γ_2 mit $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$) sowie eine **Basis der Kohomologie** $H^1(E_u, \mathbb{C})$

$$\lambda_1 = \frac{dx}{y} \quad \lambda_2 = \frac{x dx}{y} .$$

Dabei ist λ_1 das **eindeutige holomorphe Differential** auf E_u .
Es folgen die Perioden des Torus

$$b_i = \oint_{\gamma_i} \lambda_1 \quad \forall i = 1, 2$$

sowie der komplexe Torusparameter

$$\tau_u = b_1/b_2 \quad \text{mit } \text{Im}(\tau_u) > 0 .$$

Exakte Lösung (5)

Wir wollen nun a_D und a als Integrale über Zykeln darstellen, da die Homologiezykel gerade dieselbe Monodromie auf E_u aufweisen

$$a_D = \oint_{\gamma_1} \lambda \quad a = \oint_{\gamma_2} \lambda ,$$

für ein $\lambda = a_1(u) \lambda_1 + a_2(u) \lambda_2 \in H^1(E_u, \mathbb{C})$.

Ansatz:

$$\frac{d\lambda}{du} = f(u) \lambda_1 = f(u) \frac{dx}{y} .$$

Exakte Lösung (6)

Aus dem Ansatz $d\lambda/du = f(u) \lambda_1$ folgt

$$\frac{da_D}{du} = \oint_{\gamma_1} \frac{d\lambda}{du} = f(u) b_1 \quad \frac{da}{du} = f(u) b_2$$

sowie

$$\tau = \frac{\partial a_D}{\partial a} = \frac{\frac{da_D}{du}}{\frac{da}{du}} = \frac{b_1}{b_2} = \tau_u .$$

Damit induziert aber $\text{Im}(\tau_u) > 0$ gerade $\text{Im}(\tau) > 0$; die **Positivität der kinetischen Energie** ist gewährleistet!

Seiberg und Witten haben gezeigt, dass dieser **Ansatz auch notwendig** ist zur Erfüllung dieser Bedingung.

Exakte Lösung (7)

Die Asymptotik an den singulären Punkten legt $f(u) = -\sqrt{2}/4\pi$ fest und damit

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{y dx}{x^2-1}.$$

Wir wählen nun γ_1 und γ_2 so, dass wir folgende Integraldarstellungen erhalten

$$a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^u \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Diese haben genau die **gewünschte Monodromie** an den Singularitäten!

Exakte Lösung (8)

Unter Verwendung der Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 dx x^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-\beta-1} (1-zx)^{-\alpha}$$

berechnet man

$$a(u) = \sqrt{2(1+u)} \, {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{1+u}\right)$$

$$a_D(u) = \frac{i}{2} (u-1) \, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \frac{1-u}{2}\right)$$

$$\tau = \frac{\partial a_D}{\partial a} = i \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{u-1}{u+1}\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{u+1}\right)}.$$