Supersymmetrie

Johannes Meisig

Überblick

- Darstellungen der Poincarégruppe
- Super-Poincaré-Algebra
- Supermultipletts
- Superraum, Superfelder
- chirale Felder, Vektorfelder

Überlagerung der Lorentzgruppe

Betrachte doppelte Überlagerung

$$\pi : \quad SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Definiere Isomorphismus $\widehat{x} = \sigma(x) = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \sigma_\mu$

Damit wird die Überlagerung gegeben durch

$$\widehat{\Lambda x} = A\widehat{x}A^* \quad A \in SL(2,\mathbb{C})$$

Inäquivalente Darstellungen

Definierende Darstellung auf einem zweidimensionalen Vektorraum

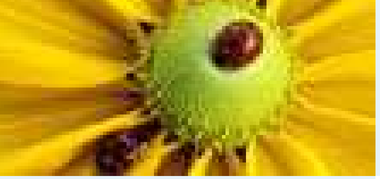
$$u \mapsto Au$$

Nicht die einzige Möglichkeit:

$$v \mapsto \bar{A}v$$

Es gibt noch mehr Möglichkeiten, aber jede Darstellung ist gegeben durch

$$\left(D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}\right)^{\otimes n} \otimes \left(D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}\right)^{\otimes m}.$$



Spinortransformation

Van-der-Waerden-Notation:

$$\left(\frac{1}{2},0\right) \qquad \text{linkschiraler 2-Weylspinor } \psi_\alpha$$

$$\left(0,\frac{1}{2}\right) \qquad \text{rechtschiraler 2-Weylspinor } \bar{\psi}_{\dot\alpha}$$

Transformation unter $SL(2,\mathbb{C})$

$$\psi'_{\ \alpha} = M_\alpha{}^\beta \psi_\beta \qquad \bar{\psi}'_{\dot\alpha} = \bar{M}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \bar{\psi}_{\dot\beta}$$

Indexgymnastik:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$$

Spinortransformation

Wir haben eine $SL(2,\mathbb{C})$-invariante Paarung,

$$\langle u, v\rangle = u_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} v_\beta$$

weil die Matrix $\varepsilon^{\alpha\beta}$ $SL(2,\mathbb{C})$-invariant ist. Daraus folgt $SL(2,\mathbb{C})$-Kovarianz von Objekten, deren Indizes mit $\varepsilon^{\alpha\beta}$ bearbeitet werden.

Um einen Diracspinor zu erhalten werden die $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ Darstellungen zusammengesetzt:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

Für die Majorana-Darstellung gilt $\chi^{\dot\alpha} = \bar\psi^{\dot\alpha}$.

Supersymmetrie

Erweiterung der Poincaré-Symmetrie durch Superalgebra $\mathcal{S}$ gegeben durch

- Die Algebra $\mathcal{S}$ ist ein (modulo 2) gradierter Vektorraum.

$$S = V_0 \oplus V_1$$

$$[V_0, V_0] \subset V_0 \quad [V_0, V_1] \subset V_1 \quad [V_1, V_1] \subset V_0$$

- Die Klammer ist bilinear und gradadditiv.

$$[v_1, v_1'] = [v_1', v_1]$$

Für Erweiterungen der Poincaré-Symmetrie muss gelten:

- Alle Elemente des Fermisektors ${}^1\mathcal{S}$ transformieren wie Spinoren.

Supersymmetrie

Erweiterung der Poincaré-Symmetrie durch Superalgebra $\mathcal{S}$ gegeben durch

- Die Algebra $\mathcal{S}$ ist ein (modulo 2) gradierter Vektorraum.

$$S = V_0 \oplus V_1$$

$$[V_0, V_0] \subset V_0 \quad [V_0, V_1] \subset V_1 \quad [V_1, V_1] \subset V_0$$

- Die Klammer ist bilinear und gradadditiv.

$$[v_1, v_1'] = [v_1', v_1]$$

Für Erweiterungen der Poincaré-Symmetrie muss gelten:

- Alle Elemente des Fermisektors ${}^1\mathcal{S}$ transformieren wie Spinoren.

SUSY-Algebra ohne zentrale Ladungen

- SUSY-Algebra wird durch antikommutierende Generatoren Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = (Q_\alpha)^\dagger$ gegeben.
- Wir wählen die Majorana-Darstellung.
- Die Generatoren transformieren unter der $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ bzw. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ Darstellung.
- Die Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ beschreiben eine Erweiterung der Poincaré-Symmetrie, keine interne Symmetrie.

Für N Generatorpaare lauten die Vertauschungsregeln:

$$
\begin{aligned}
\left\{Q_\alpha{}^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha} J}\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \delta^I{}_J \\
\left\{Q_\alpha{}^I, Q_{\dot{\alpha} J}\right\} &= 0 \\
\left\{\bar{Q}_\alpha{}^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha} J}\right\} &= 0.
\end{aligned}
$$

Rechte Seite transformiert wie die Darstellung $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

SUSY-Algebra ohne zentrale Ladungen

$$
\begin{aligned}
\left\{Q_\alpha{}^I, \bar{Q}_{\dot\alpha J}\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \delta^I{}_J \\
\left\{Q_\alpha{}^I, Q_{\dot\alpha J}\right\} &= 0 \\
\left\{\bar{Q}_\alpha{}^I, \bar{Q}_{\dot\alpha J}\right\} &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Generatoren transformieren unter der Poincaréalgebra wie Spinoren:

$$
\begin{aligned}
\left[M_{\mu\nu}, Q_\alpha\right] &= -\frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \\
\left[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right] &= -\frac{1}{2}(\bar\sigma_{\mu\nu})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} Q_{\dot\beta} \\
\left[Q_\alpha, P_\mu\right] &= \left[\bar{Q}_{\dot\alpha}, P_\mu\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Kommutatoren sind klar, der letzte kann berechnet werden.

Aus der Jacobiidentität folgt $\left[Q_\alpha, P_\mu\right] = 0$.

Darstellungen der SUSY-Algebra

Wir suchen irreduzible Darstellungen auf (asymptotischen) Einteilchenzuständen.

Aus P_μ und $W^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$ erhält man die Poincaré-Casimir-Operatoren:

$$P^2 = P_\mu P^\mu \qquad W^2 = -m^2 \boldsymbol{J}^2$$

In der SUSY-Algebra bleibt P^2 Casimir, W^2 nicht!

Denn W^2 enthält $M_{\mu\nu}$ und $\left[M_{\mu\nu}, Q_\alpha\right] \neq 0$.

Wir klassifizieren die Darstellungen nach Masse. (Mehr können wir nicht tun).

Darstellungen der SUSY-Algebra

Benutze Wigners Methode der induzierten Darstellung.
Wähle Standardimpuls auf der Massenschale $p^2 = m^2$.

Suche nach unitären endlichdimensionalen Darstellungen der kleinen Gruppe.

Wie schon erwähnt, wird P_μ durch Q_α, $\overline{Q}_{\dot{\alpha}}$ invariant gelassen. Die kleine Gruppe wird durch die Superladungen erweitert!

Reduzible Darstellungen der kleinen Gruppe zerfallen in Supermultipletts.

Die irreduziblen Blöcke werden wie üblich mit den Teilchen identifiziert.

Masselose Darstellung

Wähle den Standardimpuls $p^\mu = (E, 0, 0, -E)$ mit $E > 0$. Dann lautet die Algebra der Superladungen:

$$\left\{Q^I{}_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}J}\right\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \delta^I{}_J = 4E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^I{}_J$$

In einer unitären Darstellung muss $Q_{1I} = \bar{Q}_{\dot{1}I} = 0$ für alle I gelten. Definiere $q^I \equiv (1/2\sqrt{E}) Q^I_2$. Dann gilt:

$$\{q^I, (q^J)^\dagger\} = \delta^{IJ} \qquad \text{(fermionische Oszillatoralgebra)}$$

Dies ist eine $2N$ dimensionale Cliffordalgebra.

Alle Zustände können mit den $(q^J)^\dagger$ aus dem Cliffordvakuum $|\Omega\rangle$ erzeugt werden.

Masselose Darstellung $(N = 1)$

Nehme an, $q|p_0, \lambda_0\rangle = q|\Omega\rangle = 0$. Dann ist eine Basis gegeben durch $\{|\Omega\rangle, q^\dagger|\Omega\rangle\}$.

Mithilfe des Kommutators $[W_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}]$ kann man die Wirkung von q,$q^\dagger$ auf die Helizität bestimmen.

$$q|p,\lambda\rangle = |p,(\lambda + 1/2)\rangle \qquad q^\dagger|p,\lambda\rangle = |p,(\lambda - 1/2)\rangle$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ werden zwei irreduzible Darstellungen der Poincaré-Algebra mit $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ erzeugt.

Für Invarianz der QFT muss auch die CPT-konjugierte Darstellung realisiert sein.

Es kommen ein weiterer Skalar und ein Weyl-Fermion $\left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$ hinzu.

Masselose Darstellung, beliebiges N

Starte mit einem Zustand der Helizität λ. Durch Anwendung der $(q^I)^\dagger$ entstehen N Zustände mit

$$(q^I)^\dagger |p, \lambda\rangle = |p, (\lambda - 1/2)\rangle \qquad I = 1, .., N$$

Anwenden von $(q^J)^\dagger$, $I \neq J$ auf jeden dieser Zustände liefert $N(N-1)/2 = \binom{N}{2}$ Zustände. (Reihenfolge egal!)

Den Zustand mit der gleichen Helizität $(\lambda - m/2)$ wie $(q^{I_1})^\dagger (q^{I_2})^\dagger \cdots (q^{I_m})^\dagger |\Omega\rangle$ gibt es $\binom{N}{m}$-mal.

Die Darstellung wird aufgespannt von den $2^N = \sum \binom{N}{m}$ Vektoren

$$(q^{I_1})^\dagger (q^{I_2})^\dagger \cdots (q^{I_p})^\dagger |\Omega\rangle \qquad 1 \leq I_1 < I_2 < \cdots < I_p \leq N \quad p = 1 \ldots N$$

Masselose Darstellung, beliebiges N

$N = 1$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\vert\frac{1}{2}\rangle$	$\vert 0\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}\rangle$	$\vert 0\rangle$		
	$\lambda = 1$	$\vert 1\rangle$	$\vert\frac{1}{2}\rangle$	$\vert -1\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}\rangle$		
$N = 2$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\vert\frac{1}{2}\rangle$	$2\vert 0\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}\rangle$	$\vert -\frac{1}{2}\rangle$	$2\vert 0\rangle$	$\vert\frac{1}{2}\rangle$
	$\lambda = 1$	$\vert 1\rangle$	$2\vert\frac{1}{2}\rangle$	$\vert 0\rangle$	$\vert -1\rangle$	$2\vert -\frac{1}{2}\rangle$	$\vert 0\rangle$
$N = 4$	$\lambda = 1$	$\vert 1\rangle$	$4\vert\frac{1}{2}\rangle$	$6\vert 0\rangle$	$4\vert -1\rangle$	$\vert -1\rangle$	

Tabelle 1: Familienfoto der Masselosen (Ausschnitt)

Massive Darstellung, beliebiges N

Wähle $p^\mu = (M, 0, 0, 0)$ als Standardimpuls.

$$\begin{aligned} \left\{Q^I{}_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta J}\right\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \delta^I{}_J = 2M\delta^I{}_J \, 1_{\alpha\dot\alpha} \\ \left\{Q^I{}_\alpha, Q^J{}_\beta\right\} &= 0 \end{aligned}$$

Mit $q^I{}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2M}} Q^I{}_\alpha$ erhält man die Cliffordalgebra

$$\{q^I{}_\alpha, (q^J{}_\beta)^\dagger\} = \delta^{IJ}\delta_{\alpha\beta} \qquad \{q^I{}_\alpha, q^J{}_\beta\} = \{(q^I{}_\alpha)^\dagger, (q^J{}_\beta)^\dagger\} = 0.$$

Erzeuge wieder aus dem Cliffordvakuum $q^I_\alpha|\Omega\rangle = 0$ die Zustände. Jetzt aber für jedes I zwei Erzeuger! Also 2^{2N} Zustände insgesamt.

Massive Darstellung, beliebiges N

Anders als beim masselosen Fall ist das Vakuum jetzt ein $(2s+1)$-dim. $SU(2)$-Multiplett.

Da für festes I auch die q_α^I wie ein $SU(2)$-Dublett transformieren, muss man die Drehimpulse in einer C-G-Reihe addieren.

Zum Glück sind massive Zustände aber CPT-Invariant.

Den höchsten Spin tragen Zustände der Form $(q_\alpha^1)^\dagger (q_\alpha^2)^\dagger \cdots (q_\alpha^N)^\dagger |\Omega\rangle$, $\alpha = 1, 2$.

Dies gilt, weil $(q_1^I)^\dagger (q_2^I)^\dagger = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(q_\alpha^I)^\dagger (q_\beta^I)^\dagger$ skalar ist. Wendet man alle $2N$ Erzeuger $(q_\alpha^J)^\dagger$ an, erhält man einen Spin-0-Zustand.

Massive Darstellungen

Für N=1 enthält die massive Singlet-Darstellung $2^2 = 4$ Zustände

$$|\Omega\rangle, \quad q_1^\dagger|\Omega\rangle, \quad q_2^\dagger|\Omega\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta}q_\alpha^\dagger q_\beta^\dagger|\Omega\rangle,$$

mit dem Spininhalt $(0) \oplus (1/2) \oplus (0)$, was einem komplexen Skalar und einem Weylspinor entspricht.

Sei das Vakuum nun $(2j+1)$-mal degeneriert. Die Darstellung enthält jetzt $(2j+1)2^{2N}$ (Tensorprodukt) Zustände.

Für die $N = 1$ Darstellung muss (j) mit $(0) \oplus (1/2) \oplus (0)$ kombiniert werden:

$$(j) \oplus (j+1/2) \oplus (j-1/2) \oplus (j).$$

Im Fall $j = 1/2$ ergibt sich $(1/2) \oplus (1) \oplus (0) \oplus (1/2)$.

SUSY-Algebra mit zentralen Ladungen

Nur im massiven Fall realisiert, weil die Q_{1I} sonst null sind.

$$
\begin{aligned}
\left\{Q_\alpha{}^I, \bar{Q}_{\dot\alpha J}\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \delta^I{}_J \\
\left\{Q_\alpha{}^I, Q^J{}_\beta\right\} &= 2\sqrt{2}\varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} \\
\left\{\bar{Q}_{\dot\alpha I}, \bar{Q}_{\dot\beta J}\right\} &= 2\sqrt{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} Z^*_{IJ}
\end{aligned}
$$

Bringe die antisymmetrische Matrix Z^{IJ} mit der unitären Transformation $U^I_A Q^A_\alpha$ in die Form (N gerade)

$$
Z^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & & & \\ -z_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & z_{N/2} \\ & & & -z_{N/2} & 0 \end{pmatrix}
$$

z_i reell und positiv

Zentrale Ladungen

Die Matrix Z ist also geben durch $Z = \varepsilon \otimes D$

Also kann der Index I zerlegt werden in (a, m) mit $a = 1, 2$ und $m = 1 \ldots N/2$. Betrachte einen 2×2-Block ($z_i = Z$).

$$
\begin{aligned}
\left\{Q_\alpha{}^a, \bar{Q}_{\dot\alpha b}\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \delta^a{}_b = 2M\delta^I_J \, 1_{\alpha\dot\alpha} \\
\left\{Q_\alpha{}^a, Q^b{}_\beta\right\} &= 2\sqrt{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{ab} Z \\
\left\{\bar{Q}_{\dot\alpha a}, \bar{Q}_{\dot\beta b}\right\} &= 2\sqrt{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{ab} Z
\end{aligned}
$$

Definiert man jetzt

$$
a_\alpha = \frac{1}{2}\left(Q^1_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}(Q^2_\beta)^\dagger\right) \qquad b_\alpha = \frac{1}{2}\left(Q^1_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta}(Q^2_\beta)^\dagger\right),
$$

erhält man die Algebra

$$
\{a_\alpha, a^\dagger_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}(M + \sqrt{2}Z) \qquad \{b_\alpha, b^\dagger_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}(M - \sqrt{2}Z).
$$

Eine Schranke an die Masse

$$
\begin{aligned}
(M - \sqrt{2}Z)|||\psi\rangle||^2 &= \left\langle\psi\right|\left(M - \sqrt{2}Z\right)\left|\psi\right\rangle \\
&= \left\langle\psi\right|\left\{b_1, b_1^\dagger\right\}\left|\psi\right\rangle \\
&= ||b_1|\psi\rangle||^2 + ||b_1^\dagger|\psi\rangle||^2
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Ungleichung

$$M \geq \sqrt{2}z_i$$

Sie ist eine Konsequenz aus der Unitarität der SUSY-Algebra.

Ist $M = \sqrt{2}z_i$ für ein i, dann ist ein Paar von Operatoren trivial wie beim masselosen Fall.

Da die Dimension der Darstellung dadurch reduziert wird, spricht man von kurzen Multipletts.

Formulierung mit Superfeldern

Wir wollen wie bei der Poincaré-Symmetrie manifest invariante Funktionen hinschreiben.

Dabei treten notwendigerweise Hilfsfelder auf, deren Bewegungsgleichung aber auf der Massenschale trivial ist.

$$\begin{aligned} \text{Poincaré-Algebra} \quad &\longleftrightarrow \quad \text{Minkowski-Raum} \\ \text{rel. kovariante Felder} \quad &\longleftrightarrow \quad \text{Minkowski-Raum} \\ \text{Poincaré-Superalgebra} \quad &\longleftrightarrow \quad \text{Superraum} \\ \text{Superfelder} \quad &\longleftrightarrow \quad \text{Superraum} \end{aligned}$$

Formulierung mit Superfeldern

Konstruiere den Superraum aus der Analogie zum Minkowski-Raum.

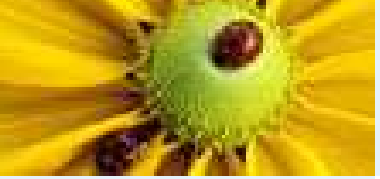
Poincarégruppe wirkt transitiv auf den Minkowskiraum.

Minkowski-Raum	$\longleftrightarrow$	Rechtsnebenklassen der Lorentzgruppe
x^μ	$\longleftrightarrow$	$\exp x^\mu P_\mu$

Es ist naheliegend den Superraum durch folgende Entsprechung zu definieren

$$(x^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}) \longleftrightarrow \exp(x^\mu P_\mu) \exp(\theta_\alpha Q^\alpha - \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\alpha}}),$$

also als RNK der Lorentzgruppe in der Super-Poincarégruppe.



Wirkung der Poincaré-Superalgebra

In natürlicher Weise wirkt die Poincaré-Supergruppe durch Multiplikation

$$\exp(\tau^\mu P_\mu)\left[\exp(x^\mu P_\mu)\exp(\theta^a Q_a)\right] = \exp((\tau^\mu + x^\mu)P_\mu)\exp(\theta^a Q_a).$$

Eine Translation wirkt also folgendermaßen:

$$(x^\mu, \theta, \overline{\theta}) \longrightarrow (x^\mu + \tau^\mu, \theta, \overline{\theta}).$$

Mit Hilfe der BCH-Formel kann man zeigen

$$\exp(\xi Q)\exp(\theta Q) = \exp(-i\xi\sigma^\mu\overline{\theta}P_\mu)\exp((\theta + \xi)Q).$$

Diese Supertranslation wirkt deshalb als

$$(x^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}) \longrightarrow (x^\mu - i\xi\sigma^\mu\overline{\theta}, \theta + \xi, \overline{\theta})$$

Wirkung der Poincaré-Superalgebra

Translationen:

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow (x^\mu + \tau^\mu, \theta, \bar{\theta})$$

Supertranslationen (der Fall $\bar{\theta}$ ist analog):

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow (x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi})$$

Diese Transformationen werden durch $\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ induziert.

Die Wirkung auf die Superfelder $\Phi(x, \theta)$ ist deshalb

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu. \end{aligned}$$

Natürlich gilt wieder $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu$.

Superfelder

Jedes Superfeld erlaubt eine Entwicklung in eine Reihe:

$$\Phi(x,\theta) = \phi + \phi_a\theta^a + \cdots + \phi_{abcd}\theta^a\theta^b\theta^c\theta^d.$$

Mithilfe von Fierz-Identitäten erhält man die Form

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta) \quad = \quad & \phi(x) + \theta_a\chi^a(x) + \theta_a\theta^a F(x) + \theta_a\gamma_5\theta^a G(x) + \theta_a\gamma^\mu\gamma_5 v_\mu(x) \\ & +\theta_a\theta^a\theta_b\xi^b(x) + \theta_a\theta^a\theta_b\theta^b E(x)\end{aligned}$$

Die benutzten Identitäten lauten

$$\begin{aligned}\theta_a\theta_b \quad &= \quad \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta C_{ab} + \bar{\theta}\gamma_5\theta(\gamma_5)_{ab} + \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta(\gamma^\mu\gamma_5)_{ab}) \\ \theta_a\theta_b\theta_c \quad &= \quad \frac{1}{2}(C_{ab}\theta_c + C_{ca}\theta_b + C_{bc}\theta_a) \\ \theta_a\theta_b\theta_c\theta_d \quad &= \quad \frac{1}{8}(C_{ab}C_{cd} - C_{ac}C_{bd} + C_{ad}C_{bc}).\end{aligned}$$

Superfelder

Ein Superfeld $\Phi(x, \theta, \overline{\theta})$ kann höchstens quadratische Potenzen von θ, $\overline{\theta}$ enthalten.

Die ersten Potenzen θ, $\overline{\theta}$ müssen an Spinoren gekoppelt werden.

Die quadratischen Terme $\theta\theta$, $\overline{\theta\theta}$ sind skalar. Sie erlauben deshalb auch Vektorterme $\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}v_{\mu}$.

Tensorterme verschwinden.

$$
\begin{aligned}
\Phi(x, \theta, \overline{\theta}) \quad &= \quad f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \overline{\theta\theta} n(x) + \theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}v_{\mu}(x) \\
&\quad + \theta\theta\overline{\theta\lambda}(x) + \overline{\theta\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta\theta}d(x),
\end{aligned}
$$

Chirale Superfelder

Um physikalische Systeme zu beschreiben, braucht man nicht alle Komponenten eines Superfelds.

Genauer, das Superfeld enthält zuviele Komponenten um eine irreduzible Darstellung der Poincaré-Superalgebra zu liefern.

Deshalb muss man weitere Bedingungen an das Superfeld fordern:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right)\Phi = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0.$$

Ein Feld, dass dieser Bedingung genügt, nennt man chirales Superfeld. Definiere auch ein antichirales Feld

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right)\Phi = D_{\alpha}\Phi^{\dagger} = 0.$$

Chirale Superfelder

Für $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ gilt

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\right) y^\mu = 0.$$

Da auch $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\beta = 0$ gilt, ist jede Funktion von (y, θ) ein chirales Superfeld. Also kann jedes chirale Superfeld geschrieben werden als

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)$$

Für antichirale Felder geht man genauso vor und erhält

$$\Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta}) = A^\dagger(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^\dagger(y^\dagger),$$

wobei $(y^\mu)^\dagger = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Die D_α, $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ setzen sich aus Ableitungen zusammen. Deshalb sind Potenzen von chiralen Feldern chirale Felder.

Chirale Superfelder

$$\Phi(y,\theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)$$

Entwickle $\Phi(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}, \theta)$ um (x, θ):

$$\begin{aligned}\Phi(x^\mu,\theta,\overline{\theta}) \quad &= \quad A(x) + i\partial_\mu A(x)\,\theta\sigma^\mu\overline{\theta} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu A(x)\,\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\theta\sigma^\nu\overline{\theta} \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi(x)\,\theta\sigma^\mu\overline{\theta} + \theta\theta F(x).\end{aligned}$$

Mithilfe der Fierz-Identität

$$\theta^2\overline{\theta}^2 = -\frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\overline{\theta}\overline{\sigma}_\mu\theta)$$

kann man den Term mit den höchsten Potenzen in θ, $\overline{\theta}$ umschreiben:

$$\begin{aligned}\Phi(x^\mu,\theta,\overline{\theta}) \quad &= \quad A(x) + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\,\partial_\mu A - \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\,\Box A \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi\,\theta\sigma^\mu\overline{\theta} + \theta\theta F(x).\end{aligned}$$

Vektor-Superfelder

$$
\begin{aligned}
F(x,\theta,\bar\theta) \quad = \quad & f(x) + \theta\,\phi(x) + \bar\theta\,\bar\chi(x) + \theta\theta\, m(x) + \bar\theta\bar\theta\, n(x) \\
& + \theta\sigma^\mu\bar\theta\, V_\mu(x) + \theta\theta\bar\theta\,\bar\lambda(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\,\psi(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\, d(x)
\end{aligned}
$$

Damit das Feld V_μ mit einem Vektorboson identifiziert werden kann, muss es reell sein. Deshalb muss das Superfeld selbst reell sein.

Mit den Formeln bzw. Definitionen für Spinoren

$$
\begin{aligned}
(\chi\psi)^\dagger \quad &= \quad \bar\psi\bar\chi \\
(\chi\sigma^\mu\bar\psi)^\dagger \quad &= \quad \psi\sigma^\mu\bar\chi
\end{aligned}
$$

Ergeben sich die Forderungen

$$
\begin{array}{ccc}
f = f^* & V_\mu = V_\mu^* & d = d^* \\
m* = n & \phi = \chi & \lambda = \psi
\end{array}
$$

Vektor-Superfelder

In einer praktischen Notation nimmt ein Vektorfeld folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar\theta) &= C + i\theta\chi - i\bar\theta\bar\chi + \frac{i}{2}\theta^2(M+iN) - \frac{i}{2}\bar\theta^2(M-iN) \\ &\quad -\theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu + i\theta^2\bar\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi\right) \\ &\quad -i\bar\theta^2\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar\chi\right) + \frac{1}{2}\theta^2\bar\theta^2\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right) \end{aligned}$$

Betrachte folgende Summe:

$$\begin{aligned} \Lambda + \Lambda^\dagger &= (A+\bar A) + \sqrt{2}\theta\psi + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi + \theta^2 F + \bar\theta^2\bar F + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu(A-\bar A) \\ &\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar\theta + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi - \frac{1}{4}\theta^2\bar\theta^2\Box(A+\bar A). \end{aligned}$$

Die ersten fünf Felder $(A+\bar A), \psi, \bar\psi, F, \bar F$ können frei gewählt werden.

Eichung von Vektor-Superfeldern

Also kann man ein beliebiges Vektorfeld umschreiben in

$$\begin{aligned} V &= V_{\mathrm{WZ}} + \Lambda + \Lambda^\dagger \\ &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2\overline{\theta\lambda} - i\bar{\theta}^2\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D + \Lambda + \Lambda^\dagger, \end{aligned}$$

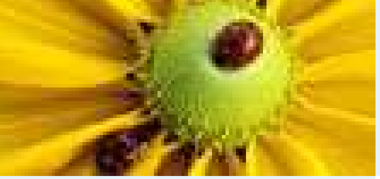
indem man $C = \chi = \bar{\chi} = M = N = 0$ setzt.

Diese Wess-Zumino-Eichung verletzt die Supersymmetrie!

$$\begin{aligned} \Lambda + \Lambda^\dagger &= (A + \bar{A}) + \sqrt{2}\theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \theta^2 F + \bar{\theta}^2\bar{F} + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(A - \bar{A}) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box(A + \bar{A}). \end{aligned}$$

Wählt man $A = -\bar{A}$ und $\psi = F = 0$ so liefert $V \to V + \Lambda + \Lambda^\dagger$ zusätzlich eine Eichtransformation:

$$A_\mu \to A_\mu + i\partial_\mu(A - \bar{A}).$$



Feldstärke

Zur supersymmetrischen Maxwell-Theorie fehlt noch ein eichinvarianter Term $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$.

Wir haben gesehen, dass $V \to V + \left(\Lambda + \Lambda^\dagger\right)$ zu einer Eichtransformation führt. Umgekehrt kann man auch sagen eine Eichtransformation impliziert $V \to V + \left(\Lambda + \Lambda^\dagger\right)$.

Um V invariant unter Eichtransformationen zu machen, vernichten wir einfach die chiralen Felder, die bei solchen Transformationen auftreten.

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V \qquad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} V$$

Da $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^2 = 0$ ist W_α ein chirales Superfeld.

Feldstärke

Setzt man für das chirale Feld W_α die Standardform an

$$W_\alpha = A_\alpha(y) + \theta^\beta \phi_{\alpha\beta}(y) + \theta\theta F_\alpha(y),$$

so erhält man mit

$$W_\alpha| = A_\alpha = -i\lambda_\alpha \quad D_\beta W_\alpha| = \phi_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\gamma}\left(\delta^\gamma{}_\alpha D + \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\gamma F_{\mu\nu}\right)$$
$$D^2 W_\alpha| = -4F_\alpha = -16\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$$

folgende Form für W_α:

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F_{\mu\nu} + \theta^2(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_\alpha$$

Dabei ist $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der bekannte Ausdruck für die (abelsche) Feldstärke.

Konstruktion von Lagrangians

Betrachte den skalaren Lagrangian (Φ chiral)

$$\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4\theta K(\Phi, \Phi^\dagger) + \int \mathrm{d}^2\theta W(\Phi) + \int \mathrm{d}^2\overline{\theta}\,\overline{W}(\Phi^\dagger).$$

Der Lagrangian muss reell und invariant unter Super-Poincaré-Symmetrie sein.

Wie ist die Integration zu verstehen? Definiere den Wert des Integrals $\int \mathrm{d}^4\theta$ als den Koeffizienten von $\theta^2\overline{\theta}^2$.

Warum sind die Terme invariant?

Was ist $K(\Phi, \Phi^\dagger)$? Im wesentlichen kinetischer Term $\Phi^\dagger\Phi$.

$$\begin{aligned}\Phi(x^\mu, \theta, \overline{\theta}) \quad &= \quad A(x) + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\,\partial_\mu A - \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\,\Box A \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\,\sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi\,\theta\sigma^\mu\overline{\theta} + \theta\theta F(x).\end{aligned}$$

Invarianz unter SUSY

$$\begin{aligned}\Phi(x^\mu,\theta,\bar\theta) &= A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\,\partial_\mu A - \frac{1}{4}\theta^2\bar\theta^2\,\Box A \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi\,\theta\sigma^\mu\bar\theta + \theta\theta F(x).\end{aligned}$$

Gilt SUSY-Invarianz?

$$\delta_\xi\Phi = (\xi Q + \bar\xi\bar Q)\Phi$$

Da D_α, $\bar D_{\dot\alpha}$ mit Q_β, $\bar Q_{\dot\beta}$ vertauschen, bleiben transformierte Felder chiral. Es gilt also wieder der Ansatz

$$\delta\Phi = \delta A + \sqrt{2}\theta\delta\psi + \theta\theta\delta F + \cdots .$$

Einziger Beitrag zur $\theta\theta$-Komponente ist

$$(\bar\xi\bar Q)\,\sqrt{2}\theta\psi = \bar\xi^{\dot\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\right)\sqrt{2}\theta\psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\,\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar\xi$$

Invarianz unter SUSY

Damit lautet der transformierte Term

$$\delta F = -\frac{1}{\sqrt{2}} i\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\xi}.$$

Unter SUSY-Transformationen geht die F-Komponente in eine totale Ableitung über!

Genauso kann man zeigen, dass der d-Term eines Vektorfelds

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) \quad = \quad & C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta^2 (M + iN) - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2 (M - iN) \\ & -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2\bar{\theta}\left(\lambda + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right) \\ & -i\bar{\theta}^2\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}\right) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right) \end{aligned}$$

in eine totale Ableitung übergeht $\delta D = \partial_\mu(-\xi\sigma^\mu\bar{\lambda} + \lambda\sigma^\mu\bar{\xi})$.

Der skalare Lagrangian

$$\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4\theta\,\Phi\Phi^\dagger + \int \mathrm{d}^2\theta\, W(\Phi) + \int \mathrm{d}^2\bar{\theta}\,\overline{W}(\Phi^\dagger)$$

Da $\Phi\Phi^\dagger$ reell ist, ist es ein Vektor-Superfeld! Dessen höchste Komponente transformiert wie eine totale Ableitung.

Als Funktionen von (anti-)chiralen Feldern sind $W(\Phi)$, $\overline{W}(\Phi^\dagger)$ wieder (anti-)chiral.

Es gibt noch allgemeinere kinetische Terme der Form

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) \rightsquigarrow g^{ij}\partial_\mu A_i^\dagger \partial^\mu A_j.$$

Der Lagrangian für das freie Feld lautet in Komponenten

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger\Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \partial_\mu A^\dagger \partial^\mu A + F^\dagger F - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi.$$

Lagrangians für Eichfelder

Eichfeldtheorie = Feldstärke + Materiefelder + Potential

$$\begin{aligned} V &\mapsto V + i\left(\Lambda - \Lambda^\dagger\right) \\ A_\mu &\mapsto A_\mu - \partial_\mu(A + \bar{A}). \end{aligned}$$

$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V$ beschreibt die Feldstärke.

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F_{\mu\nu} + \theta^2(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_\alpha.$$

Da W_α chiral ist, ist auch $W^\alpha W_\alpha$ chiral. Betrachte die reelle Kombination

$$\frac{1}{4g^2}\left(\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar{\theta}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\right).$$

Dieser Lagrangian ist invariant unter SUSY und Eichung.

Lagrangians für Eichfelder

In einer Eichtheorie leben die Materiefelder Φ_i in einer Darstellung der Eichgruppe.

$$\begin{aligned} \Phi &\mapsto e^{i\varphi}\Phi \\ \Phi &\mapsto e^{-i2\Lambda}\Phi \end{aligned}$$

Der kinetische Term ist jetzt nicht mehr invariant!

$$\Phi^\dagger\Phi \mapsto \Phi^\dagger e^{\boldsymbol{-i2(\Lambda-\Lambda^\dagger)}}\Phi$$

Aber $i(\Lambda-\Lambda^\dagger)$ ist reell und kann in ein Vektorfeld absorbiert werden $V \mapsto V + i(\Lambda-\Lambda^\dagger)$.

$$\Phi^\dagger e^{2V}\Phi \mapsto \Phi^\dagger e^{\boldsymbol{i2\Lambda^\dagger}} e^{2V+\boldsymbol{i2\left(\Lambda-\Lambda^\dagger\right)}} e^{\boldsymbol{-i2\Lambda}}\Phi = \Phi^\dagger e^{2V}\Phi$$

Als (reelles) Vektorfeld invariant unter SUSY und Eichung.

Übergang zum nichtabelschen Fall

Im nichtabelschen Fall muss die Eichgruppe genauer studiert werden.

Sei G die Eichgruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Liealgebra. Diese ist durch die Strukturkonstanten f^{abc} charakterisiert.

Wir wählen in $\mathfrak{g}$ eine Basis $\{T^a\}$ und ein inneres Produkt Tr.

Eichfelder sind Einsformen und nehmen Werte in $\mathfrak{g}$ an: $A_\mu = A^i_\mu T_i$.

Die Feldstärke ist die Krümmungszweiform des Eichfeldes:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu].$$

Relativ zu einer Basis:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g f^i_{jk} A^j_\mu A^k_\nu.$$

Der kinetische Term im nichtabelschen Fall

Das Superfeld $V = V_A T^A$ muss jetzt auch Werte in $\mathfrak{g}$ annehmen.

Im nichtabelschen Fall sind Eichtransformationen natürlich komplizierter:

$$V \mapsto V + i\left(\Lambda - \Lambda^\dagger\right) - \frac{i}{2}\left[V, \Lambda + \Lambda^\dagger\right] + \cdots$$

Für Materiefelder gilt jetzt mit $\Lambda = \Lambda_A T^A$

$$\Phi \mapsto e^{-i2\Lambda}\Phi.$$

$$\Phi^\dagger e^{2V}\Phi \mapsto \Phi^\dagger\, e^{i2\Lambda^\dagger} e^{2V} e^{-i2\Lambda}\,\Phi$$

Ist invariant, wenn $e^V \mapsto e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda}$ gilt. Zum Glück gilt

$$e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} = e^{\left[V + i\left(\Lambda - \Lambda^\dagger\right) - \frac{i}{2}\left[V, \Lambda + \Lambda^\dagger\right] + \cdots\right]}.$$

Die nichtabelsche Feldstärke

Als Exponent ist die Eichtransformation ziemlich einfach.

Schreibe deshalb mithilfe der Kettenregel

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}^2 D_\alpha V = -\frac{1}{8}\overline{D}^2 e^{-2V} D_\alpha e^{2V}.$$

Unter Eichtransformationen verhält sich W_α eichkovariant

$$W_\alpha \mapsto e^{-i2\Lambda} W_\alpha e^{2i\Lambda}.$$

Deshalb ist der folgende Term eichinvariant.

$$\frac{1}{4g^2}\left(\int \mathrm{d}^2\theta\, \mathbf{Tr} W^\alpha W_\alpha + \int \mathrm{d}^2\overline{\theta}\, \mathbf{Tr} \overline{W}_{\dot\alpha} \overline{W}^{\dot\alpha}\right)$$

Man nehme anstatt dessen mit $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}\mathrm{Im}\left(\tau \mathrm{Tr} \int \mathrm{d}^2\theta W^\alpha W_\alpha\right).$$

Der volle Lagrangian

Mit dieser Wahl materialisiert sich der gewünschte θ-Term:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{a\mu\nu} + \frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2} D^a D^a - i\lambda^a \sigma^\mu D_\mu \overline{\lambda}^a\right).$$

Also lautet der allgemeine $N = 1$ Eichtheorie Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \mathrm{Im}\left(\tau \mathrm{Tr} \int \mathrm{d}^2\theta W^\alpha W_\alpha\right) + \int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta} \Phi^\dagger e^{-2V} \Phi + \int \mathrm{d}^2\theta W(\Phi) + \int \mathrm{d}^2\overline{\theta}\, \overline{W}(\Phi^\dagger).$$