Vortrag YT

1. Einleitung / Motivation

- Thema des Vortrags: Young Tableaux Tensorprodukte &
- ~~sch~~ Kästchendiagramme
- folgen bestimmten Schemata
- machen teilweise unübersichtliche und komplizierte Rechnungen intuitiv verständlich
- Beispiel: ↳ Bestimmung der Dimension ~~...~~ einer irreduziblen Darstellung der SU(n)

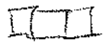
  ↳ Wie sieht die irreduzible Darstellung ~~zur~~ des Tensorprodukts zweier irreduzibler solcher Darstellungen aus?
- veranschaulichen insbesondere gemischte Symmetrien
- gemischte Symmetrien meint:

  Tensoren 3. Stufe (und höher) können nicht nur komplett symmetrisch oder antisymmetrisch sein (wie Tensoren 2. Stufe $T_{ij} = -T_{ji}$ oder $T_{ij} = T_{ji}$) sondern weisen noch zusätzliche Symmetrien auf

2. Regeln

 ← · können mit Zahlen/Buchstaben gefüllt werden

· entsprechen Indizes in einem Tensor

 ← in einer Reihe angeordnete Boxen (beliebig lang) meinen:
der zum YT korrespondierende Tensor ist komplett symmetrisch unter Vertauschung der Inhalte der Boxen ← zur Korrespondenz sage ich gleich noch etwas

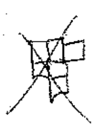
 ← in einer Spalte angeordnete Boxen (beliebig langen) meinen:
der zum YT korrespondierende Tensor ist komplett antisymmetrisch unter Vertauschung der Inhalte der Boxen

 ← hier erkennt man die eben angesprochene gemischte Symmetrie

zu beachten:

- Länge der Reihen darf nicht größer werden, wenn man im Tableaux von oben nach unten geht; also nicht

- Ebenso: Länge der Spalten darf nicht größer werden, wenn man von links nach rechts geht; also nicht



<u>Beispiel</u>

 könnte man also wie folgt mit den Zahlen von 1 bis 3 füllen

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle = |\psi_1\rangle$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = |213\rangle + |123\rangle - |312\rangle - |132\rangle = |\psi_2\rangle$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} = |321\rangle + |231\rangle - |123\rangle - |213\rangle = |\psi_3\rangle$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} = |231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle = |\psi_4\rangle$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = |132\rangle + |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle = |\psi_5\rangle$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = |312\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle = |\psi_6\rangle$$

Dabei sieht man schnell:

$|\psi_1\rangle = -|\psi_3\rangle$ $\qquad$ $|\psi_2\rangle = -|\psi_6\rangle$

und $|\psi_4\rangle = -|\psi_5\rangle$

bei genauerem Hingucken ist auch noch

$|\psi_4\rangle = -|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$

→ es gibt nur 2 unterschiedliche ~~Zustände~~ Darstellungen

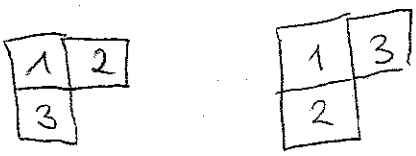
- Beispiel soll plausibel machen:
  Regeln zur „Befüllung" der Kästchen benötigt

- für sog. Standard Tableau muss gelten

  ↳ Einträge in Kästchen werden nicht kleiner, wenn man in einer Reihe von links nach rechts geht

  ↳ Einträge in Kästchen müssen größer werden, wenn man in einer Spalte von oben nach unten geht

- Damit ergibt sich für das Beispiel

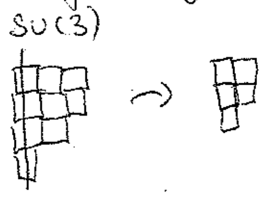


(vorausgesetzt jeder Eintrag kommt nur einmal vor)

- Klar: * Bei einer Darstellung der SU(n) kann eine Spalte maximal n Kästchen lang sein

  * Dafür 1 Möglichkeit
  * entspräche ε-Tensor der ~~entsprechende~~ Dimension n
  * kann weggelassen werden
  * ein Tableau in dem das vorkommt
    → ersetzt durch eins, in dem diese Spalte einfach gestrichen wird

→ z.B.



3. Korrespondenz zwischen YT und Tensor

- Einfaches Beispiel

a^{ijk} allgemeiner Tensor,
drei obere Indizes,
keine speziellen Symmetrieeigenschaften

$\begin{array}{|c|c|}\hline i & j \\ \hline k \\ \cline{1-1}\end{array}$ liefert dann $a^{ijk} + a^{jik} - a^{kji} - a^{jki}$

- allgemeines Schema

(1) Symmetrisieren über Indizes, die in der gleichen Zeile erscheinen

(2) Antisymmetrisieren über ~~Indizes~~ Indexpaare, die in der gleichen Spalte erscheinen

- Theorem (wie immer ohne Beweis)

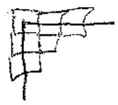
↳ Ein einem bestimmten YT entsprechender Tensor bildet die Basis einer irreduziblen Darstellung von $SU(n)$

↳ Aufzählung aller möglichen YTs (bei denen keine Spalte mehr als $n-1$ Boxen besitzt) mit den dazugehörigen Tensoren:
Die Tensoren bieten in der Hinsicht eine vollständige Menge, dass alle endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen der Gruppe genau einmal gezählt werden

- Das heißt: Tableaux → Anz. d. irreduziblen Darstellungen
→ entsprechende Tensoren

4. Dimension eines YTs
(und der dazugehörigen irreduziblen Darstellung)

- es gibt zwei Möglichkeiten zur Bestimmung, hier eine
- dazu: definiere Hakenlänge h_i
  - → wähle eine Box
  - → zeichne zwei aufeinander senkrechte Linien, die von dieser Box ausgehend nach unten und nach rechts das Tableau verlassen



  - → Hakenlänge ist dann die Anzahl der Boxen, die dabei passiert werden (inkl. der Ausgangsbox)
- weitere wichtige Größe: Entfernung zur ersten Box D_i
  - → erste Box: Box oben links
  - → Entfernung wird wie folgt gemessen:
    - → Schritt nach rechts: +1
    - → Schritt nach unten: −1

    $\Rightarrow$ Schritte entlang der Diagonalen: 0

0	1	2	3
−1	0	1	2
−2	−1	0	
−3			

- damit: Dimension der irreduziblen Darstellung der SU(n) aus dem entsprechenden YT ist

$$d = \prod_i \frac{(n+D_i)}{h_i}$$

(Produkt läuft über alle Boxen des Tableau)

5. YT der komplex konjugierten Darstellung

- Wie geht man vor um dieses Tableau zu finden?

1. Notiere das Tableau — Bsp.: SU(3) $6 \rightarrow$ 

2. Auffüllen mit Boxen, sodass ein rechteckiges Tableau mit n Reihen entsteht — auffüllen $\rightarrow$ 

3. hinzugefügte Boxen um 180° drehen und schon hat man die komplex konjugierte Darstellung — $6^* \rightarrow$ 

6. YTs & Clebsch-Gordan Zerlegung

- „Algorithmus" um das Tensorprodukt von zwei irreduziblen Darstellungen α, β in die irreduziblen Darstellungen von $\alpha \otimes \beta$ zu zerlegen
- Man startet mit den irreduziblen Darstellungen α, β und den dazugehörigen Tableaux A, B
- „Schrittfolge"

① Wähle eins der beiden Tableaux z.B. B (am besten das Kleinere) und fülle die erste Reihe davon mit a's, die 2. mit b's usw.

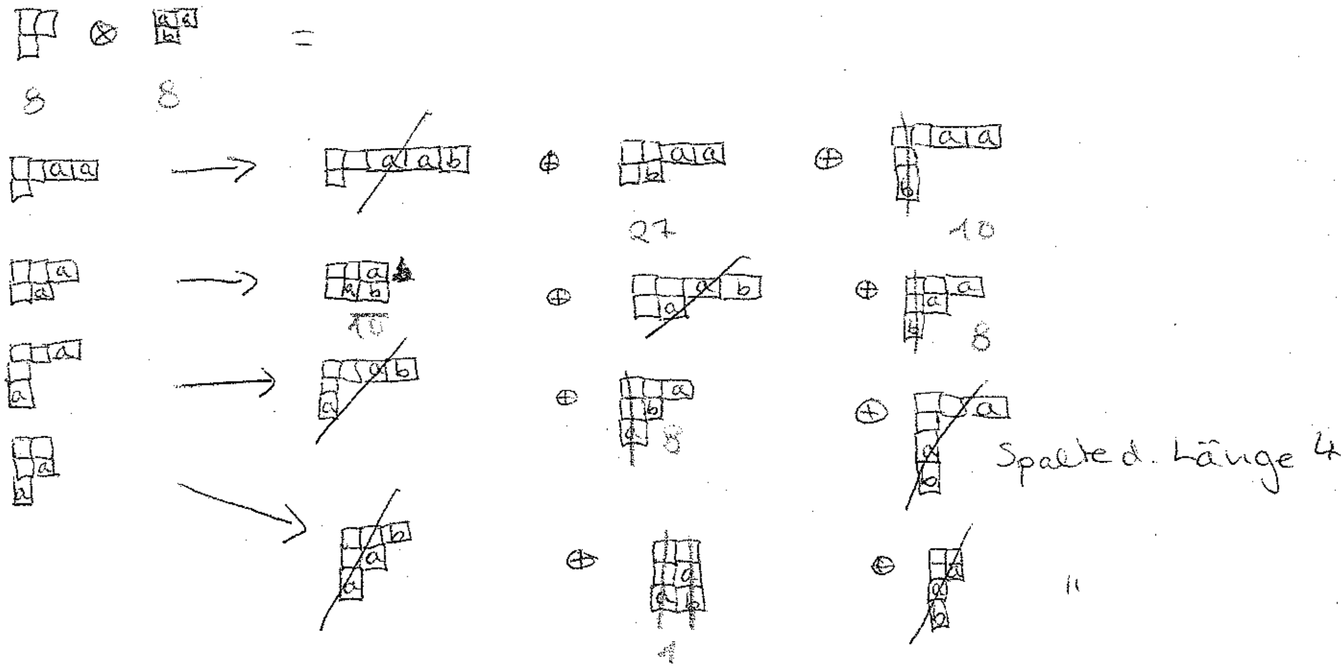
② Füge alle Boxen mit dem Buchstaben a z.B. an das Tableaux B an undzwar so, dass
→ keine 2 a's in der gleichen Spalte sind
→ das Resultat nach wie vor ein YT ist

alle Möglichkeiten werden aufgezeichnet

→ Anschließend wiederholt man diesen Schritt mit den b's, c's usw.

③ Nachdem alle Symbole zum Tableau hinzugefügt wurden, werden diese in jeder Reihe von <u>rechts → links</u> gelesen.
Gibt es dann zu einem Zeitpunkt mehr b's als a's (oder entsprechend für c's usw.), so wird das Tableau verworfen
→ verhindert etwas doppelt zu zählen

- Beispiel (SU(3))



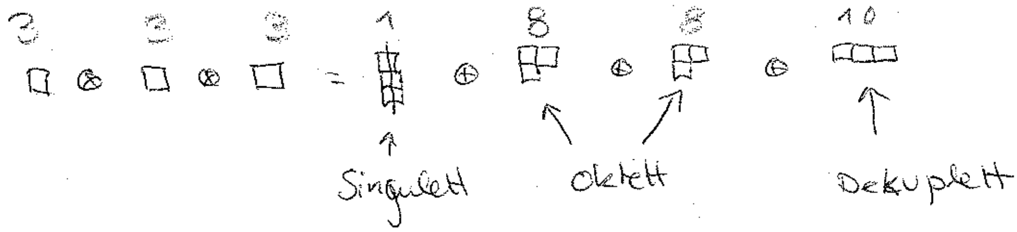
7. Kleine Anwendung zum Schluss

- 3 Geschmäcker der Quarks: up, down, strange

→ entspricht einer fundamentalen Darstellung der Dimension 3 und damit einem YT □

(9)

→ Man erhält mit den YTs die bekannte Klassifikation der Baryonen



- 3 Antiquarks $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$

→ in der komplex konjugierten Darstellung 3^*

→ entsprechen damit