Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie-algebras
Lecture 6

Seminarvortrag von
Annekathrin Müller-Lohmann
Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

7. Januar 2004

Motivation

- Lecture 5 explizite Form der Polynome des bosonischen FOCK-Raumes

$$B = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$$

  die unter σ_m den semi-unendlichen Monomen aus $F^{(m)}$ entsprechen
- Lecture 6 Wie sehen diese Polynome in B aus?

Elementare SCHUR-Polynome

Definition 6.1 Die elementaren SCHUR-Polynome $S_k(x)$ sind Polynome, die zu $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ gehören und definiert sind durch die generierende Funktion

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} S_k(x) z^k = \exp \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k \tag{1}$$

Für sie gilt:

$$S_k(x) = 0 \text{ für } k < 0 \tag{2}$$

$$S_k(x) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots=k} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\frac{x_2^{k_2}}{k_2!}\ldots \text{ für } k > 0 \tag{3}$$

Beispiele

$$S_1(x) = x_1 \tag{4}$$

$$S_2(x) = \frac{x_1^2}{2} + x_2 \tag{5}$$

$$S_3(x) = \frac{x_1^3}{6} + x_1 x_2 + x_3 \tag{6}$$

$$S_4(x) = \frac{x_1^4}{24} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2 x_2}{2} + x_1 x_3 + x_4 \tag{7}$$

Total symmetrische Funktionen h_k

$h_k =$ Summe aller Monome mit totalem Grad k in den Variablen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$

Beispiel: $h_2 = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_1\epsilon_2$

$$\sum_{k\geq 0} h_k z^k = \prod_{i=1}^{N} (1 - \epsilon_i z)^{-1} \tag{8}$$

Verbindung zu den SCHUR-Polynomen:

$$x_j = \frac{\epsilon_1^j + \ldots + \epsilon_N^j}{j} \tag{9}$$

Durch Einsetzen in (1) sieht man:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} S_k(x) z^k &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\epsilon_1^k+\ldots+\epsilon_N^k}{k}\right) z^k\right)\\
&= \prod_{i=1}^{N} \exp \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon_i^k}{k} z^k\right)}_{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-\log(1-x)}\\
&= \prod_{i=1}^{N} \exp\left(-\log(1-\epsilon_i z)\right) = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\epsilon_i z}\\
&= \sum_{k\geq 0} h_k z^k
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$S_k(x) = h_k(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N) \tag{10}$$

Partitionen und zugeordnete SCHUR-Polynome

$$Par := \text{ Menge aller Partitionen}$$

$\lambda \in Par$ ist eine nicht-steigende, endliche Sequenz von natürlichen Zahlen,

$$\lambda = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0\}$$

<u>Definition 6.2</u> Zu jedem o.g. $\lambda \in Par$ ordnen wir SCHUR-Polynome $S_\lambda(x)$ zu mit $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, definiert durch die $k \times k$-Determinante

$$S_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}(x) = \begin{vmatrix} S_{\lambda_1} & S_{\lambda_1+1} & S_{\lambda_1+2} & \cdots \\ S_{\lambda_2-1} & S_{\lambda_2} & S_{\lambda_2+1} & \cdots \\ S_{\lambda_3-2} & S_{\lambda_3-1} & S_{\lambda_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \det S_{\lambda_i+j-i(x)} \tag{11}$$

Bemerkung 6.1 Ausserdem ist

$$S_\lambda(x) = tr_{\pi_\lambda} \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_N \end{bmatrix} \tag{12}$$

was auf (10) führt, wenn π_λ die k-te symmetrische Potenz der natürlichen Darstellung von GL_N ist.

im Allgemeinen:

π_λ : Darstellung von GL_N die der Partition λ entspricht

x_j : definiert wie in (9)

Damit ist das SCHUR-Polynom ein homogenes Polynom von Grad $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$.

Beispiel: $\lambda = \{1, 1\}$:

$$S_{1,1} = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_0 & S_1 \end{vmatrix} = S_1^2 - S_2 = \frac{x_1^2}{2} - x_2$$

weitere:

$$S_2 = \frac{x_1^2}{2} + x_2 \quad S_3 = \frac{x_1^3}{6} + x_1 x_2 + x_3 \tag{13}$$

$$S_{2,1} = \frac{x_1^3}{3} - x_3 \quad S_{1,1,1} = \frac{x_1^3}{6} - x_1 x_2 + x_3 \tag{14}$$

$$S_4 = \frac{x_1^4}{24} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2 x_2}{2} + x_1 x_3 + x_4 \quad S_{2,2} = \frac{x_1^4}{12} - x_1 x_3 + x_2^2 \tag{15}$$

$$S_{2,1,1} = \frac{x_1^4}{8} - \frac{x_1^2 x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_4 \quad S_{1,1,1,1} = \frac{x_1^4}{24} - \frac{x_1^2 x_2}{2} + x_1 x_3 + \frac{x_2^2}{2} - x_4 \tag{16}$$

Theorem 6.1

$$\sigma_0\left(v_{i_0}\wedge v_{i_{-1}}\wedge\dots\right)=S_{i_0,i_{-1}+1,i_{-2}+2,\dots}(x) \tag{17}$$

wobei $i_0 > i_{-1} > \dots$ und $i_{-k} = -k$ für ausreichend großes k.

Beweis: Strategie: wir berechnen

$$\sigma_0\left\{R_0(\exp(y_1\Lambda_1+y_2\Lambda_2+\dots))v_{i_0}\wedge v_{i_{-1}}\wedge\dots\right\}=R_0^B(\exp(y_1\Lambda_1+y_2\Lambda_2+\dots))P(x) \tag{18}$$

wobei

$$P(x)=\sigma_0\left(v_{i_0}\wedge v_{i_{-1}}\wedge\dots\right) \tag{19}$$

Dieser Zusammenhang ist gezeigt, wenn beiderseits die Koeffizienten des Vakuums dieselben sind, da $\sigma_0(\psi_0)=1$ (5.5 a)

Problem:

$$\exp(\underbrace{y_1\Lambda_1 + y_2\Lambda_2 + \ldots}_{\notin \mathrm{gl}_\infty}) \notin \mathrm{GL}_\infty$$

also definieren wir uns eine größere Gruppe:

$$\overline{\mathrm{GL}}_\infty := \{A = (a_{ij}) \mid i,j \in \mathbb{Z},\ \exists A^{-1} \text{ und fast alle der } a_{ij} - \delta_{ij} \text{ mit } i \geq j \text{ sind } 0\} \tag{20}$$

Ebenso wird definiert:

$$\overline{\mathrm{gl}}_\infty := \{(a_{ij}) \mid i,j \in \mathbb{Z},\ \text{fast alle der } a_{ij} \text{ mit } i \geq j \text{ sind } 0\}$$

$\overline{\mathrm{gl}}_\infty$ und $\overline{\mathrm{GL}}_\infty$ agieren nicht auf V sondern auf der Vervollständigung $\overline{V}$ definiert als

$$\overline{V} = \left\{ \sum_j c_j v_j \mid c_j = 0 \text{ für } j \gg 0 \right\}$$

Ausserdem erweitern sich die Darstellungen R und r zu denen auf $\overline{\mathrm{gl}}_\infty$ und $\overline{\mathrm{GL}}_\infty$ auf demselben Raum F der aus V konstruiert wurde.

$$R_m(A)(v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots) = \sum_{j_m > j_{m-1} > \cdots} \left(\det A^{i_m, i_{m-1}, \cdots}_{j_m, j_{m-1}, \cdots}\right) \times v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots$$

(Gleichung (4.48)) gilt für $R_m(A)$ mit $A \in \overline{\mathrm{GL}}_\infty$.

Die Exponentialabbildung ist auf ganz $\overline{\mathrm{gl}}_\infty$ definiert und wir haben:

$$\exp r(a) = R(\exp a) \text{ für } a \in \overline{\mathrm{gl}}_\infty$$

und es ist klar dass für $a = \sum_i y_i \Lambda_i$, $a \in \overline{\mathrm{gl}}_\infty$ und damit $\exp a \in \overline{\mathrm{GL}}_\infty$ gilt. Damit kann (4.48) auf $R(\exp a)$ angewandt werden.

Im bosonischen Bild ist $r_0(\Lambda_k)$ dargestellt durch $\frac{\partial}{\partial x_k}$ für $k > 0$, so dass

$$R_0^B(\exp(y_1\Lambda_1 + y_2\Lambda_2 + \ldots)) = \exp \sum_{j \geq i} y_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$F(y) :=$ Koeffizient der 1 (des konstanten Terms) bei Anwendung auf $P(x)$, d.h.:

$$F(y) = \exp\left(\sum_{j \geq i} y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) P(x)\Bigg|_{x=0} = P(x+y)|_{x=0} = P(y)$$

Damit gilt:

$$\exp\left(\sum_{k \geq 1} \Lambda_k y_k\right) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} (\Lambda_1)^k y_k\right) \stackrel{(1)}{=} \sum_{k \geq 0} \Lambda_k S_k(y)$$

was als Matrixausdruck verstanden werden kann:

$$A_{mn} = S_{n-m}(y) \quad m, n \in \mathbb{Z}, A \in \overline{\mathrm{GL}}_\infty(\text{nach } (2)) \tag{21}$$

(18) wird damit zu:

$$\sigma_0\left(v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots\right) = \text{Koeffizient von } \psi_0 \text{ in der Entwicklung von } \sigma_0\left\{R(A)(v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots)\right\}$$

(4.48) gibt uns den Koeffizienten:

$$\det(A^{i_0, i_{-1}, i_{-2}, \ldots}_{0,-1,-2,\ldots}) \overset{(11)}{=} S_{i_0, i_{-1}+1, i_{-2}+2, \ldots} = F(y) = P(y)$$

was die Determinante einer Matrix aus Elementen von A auf den Schnittpunkten der Reihen $0, -1, -2, \ldots$ mit den Spalten $i_0, i_{-1}, i_{-2}, \ldots$ von A beschreibt. $\square$

Korollar 6.1 (Verallgemeinerung auf alle m)

$$\sigma_m \left(v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \right) = S_{i_m, i_{m-1}-m+1, i_{m-2}-m+2, \ldots} \tag{22}$$

Korollar 6.2 Die Wirkung $R_m^B(A)$ von $A \in \overline{\mathrm{GL}}_\infty$ in B^m ist

$$R_m^B(A) S_\lambda = \sum_{\mu \in Par} \det(A^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \ldots}_{\mu_1+m, \mu_2+m-1, \ldots}) S_\mu \tag{23}$$

Korollar 6.3 Die SCHUR-Polynome bilden eine orthonormale Basis in B bezüglich der kontravarianten hermiteschen Form $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definiert in 5.8, nämlich

$$\langle S_\lambda | S_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} \tag{24}$$

Die Struktur der VIRASORO-Algebra Darstellung für $c = 1$

Lecture 2 VIRASORO-Operatoren

$$L_k = \frac{\epsilon}{2} a_{\frac{k}{2}}^2 + \sum_{j > -\frac{k}{2}} a_{-j} a_{j+k} \tag{25}$$

wobei $\epsilon = 0$ für ungerade k und $\epsilon = 1$ für gerade k. Die L_k erfüllen die VIRASORO-Algebra für $c = 1$.

Da $\mathbb{C} \tilde{=} F^{(0)}$, wählen wir nicht die Darstellung 2.2 mit $\hbar = 1$ sondern für $k > 0, \mu \in \mathbb{R}$:

$$a_k = \sqrt{2}\hat{r}_0(\Lambda_k), \quad a_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{r}_0(\Lambda_{-k}), \quad a_0 = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \tag{26}$$

Damit erhalten wir:

$$L_0^{(\mu)} = \frac{\mu^2}{4} + \sum_{j\geq 1} \hat{r}_0(\Lambda_{-j})\hat{r}_0(\Lambda_j) \tag{27}$$

$$L_1^{(\mu)} = \mu\hat{r}_0(\Lambda_1) + \sum_{j\geq 1} \hat{r}_0(\Lambda_{-j})\hat{r}_0(\Lambda_{j+1}) \tag{28}$$

$$L_2^{(\mu)} = \mu\hat{r}_0(\Lambda_2) + \hat{r}_0(\Lambda_1)^2 + \sum_{j\geq 1} \hat{r}_0(\Lambda_{-j})\hat{r}_0(\Lambda_{j+2}) \tag{29}$$

Lecture 3: Die Oszillatordarstellung der VIRASORO-Algebra für $c = 1$ ist die direkte Summe von unitären, irreduziblen Höchstgewichtsdarstellungen. Jede dieser Darstellungen wird generiert von einem singulären Vektor, dem Höchstgewichtsvektor. Für gewöhnliche Werte von μ gibt es nur einen Vakuumvektor ψ_0 von $F^{(0)}$ und diese Darstellung ist die VERMA-Darstellung.

Lemma 6.1 Sei $\mu = -m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}_+$, so dass $k + m \geq 0$. Dann sind für

$$f_{m,k} = v_{k+m} \wedge v_{k+m-1} \wedge \ldots \wedge v_{m+1} \wedge v_{-k} \wedge v_{-k-1} \wedge \ldots \in F^{(0)} \tag{30}$$

die VIRASORO-Operatoren gegeben durch

$$L_j^{(-m)} f_{m,k} = 0 \text{ für } j > 0 \tag{31}$$

$$L_j^{(-m)} f_{m,k} = \frac{1}{4}(m + 2k)^2 f_{m,k} \tag{32}$$

Fragen:

- Gibt es nicht-triviale singuläre Vektoren für $\mu \neq -m \in \mathbb{Z}$?
- Gibt es noch andere singuläre Vektoren für $\mu = -m$ als in Lemma 6.1 angegeben?

Proposition 6.1

(a) Ist $\mu \notin \mathbb{Z}$, dann sind alle singulären Vektoren aus Vir in $F^{(0)}$ Vielfache des Vakuumvektors ψ_0.

(b) Ist $\mu = -m \in \mathbb{Z}$, dann ist jeder singuläre Vektor aus Vir in $F^{(0)}$ eine lineare Kombination der $f_{m,k}$ mit $k, k + m \in \mathbb{Z}_+$.

Beweis:

(a) Eine sofortige Konsequenz aus der KAC-Determinantenformel, die wir in Lecture 8 behandeln werden.

(b) Motivation:

(i) Jeder singuläre Vektor ist eine Linearkombination von singulären Eigenvektoren von $L_0^{(-m)}$.

(ii) Jeder singuläre Eigenvektor hat den $L_0^{(-m)}$-Eigenwert $h = \frac{m^2}{4} + n$ mit $n \in \mathbb{Z}_+$ und erzeugt eine Unterrepräsentation $V(1, h)$.

(iii) Aus der KAC-Determinantenformel folgt, dass $h = \frac{(m+j)^2}{4}$, $j \in \mathbb{Z}_+$

(iv) Aus Vergleich folgt, dass j gerade, also $j = 2k$ und $n = k(k+m)$, also $k + m \in \mathbb{Z}_+$

(v) Das sind die einzigen erlaubten Unterrepräsentationen und aus Lemma 6.1 folgt, dass es für jede einen singulären Eigenvektor gibt.

(vi) Damit folgt:

$$F^{(0)} = \bigoplus_{k\geq 0, k+m\geq 0} V\left(1, \frac{1}{4}(m+2k)^2\right) \tag{33}$$

Aus Lecture 4, Proposition 4.1 wissen wir

$$\dim_q F^{(0)} \equiv \sum_k \left(\dim F_k^{(0)}\right) q^k = \varphi(q)^{-1}$$

Hier:

- Unterraum $V\left(1, \frac{1}{4}(m+2k)^2\right)$
- erzeugt von $f_{m,k}$ mit Grad $k^2 + mk$

Damit gibt (33):

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{ch} V\left(1, \frac{1}{4}(m+2k)^2\right) \tag{34}$$

Wir wissen

- $f_{m,0} = \psi_0$ erzeugt $V\left(1, \frac{m^2}{4}\right)$
- Sein Charakter wird von dem Wert der VERMA-Darstellung $\varphi(q)^{-1}$ durch die Anwesenheit der Unterrepräsentation erniedrigt
- $V\left(1, \frac{(m+2)^2}{4}\right)$ wird vom singulären Vektor $f_{m,1}$ vom Grad $m+1$ erzeugt

Daher gilt

$$\operatorname{ch} V(1, \frac{m^2}{4}) \leq \frac{(1 - q^{m+1})}{\varphi(q)} q^h \tag{35}$$

Daß hier sogar exakte Gleichheit vorliegt, folgt aus einem Konsistenzvergleich von (34) und (35).

Zusammenfassung

Unter Ausnutzung des Isomorphismus zwischen $F^{(0)}$ und $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$, erhalten wir das

<u>Theorem 6.2</u> Betrachte die Darstellung

$$d_k \to L_k^{(\mu)},\ c \to 1$$

der Virasoro-Algebra auf dem Raum $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$.

Dann gilt:

(a) Ist $\mu \notin \mathbb{Z}$, dann ist die Darstellung irreduzibel und damit eine Verma-Darstellung.

(b) Ist $\mu = -m \in \mathbb{Z}$, setze

$$P_{m,k}(x) = S_{\underbrace{k+m, \ldots, k+m}_{k \text{ mal}}}(x) \text{ für } k \geq 0, k+m \geq 0$$

Dann sind die $P_{m,k}$ singuläre Vektoren mit Eigenwerten $\frac{(m+2k)^2}{4}$ und alle singulären Vektoren sind Linearkombinationen der $P_{m,k}$. Ausserdem haben wir

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+, k\geq -m} V\left(1, \frac{(m+2k)^2}{4}\right)$$

(c)

$$\operatorname{ch} V\left(1, \frac{m^2}{4}\right) = \frac{(1 - q^{m+1})}{\varphi(q)} q^h.$$

Dieses Theorem wurde von verschiedenen Autoren entdeckt, KAC [1979], SEGAL [1981] und WAKIMOTO-YAMADA [1986].

Die Ergebnisse des letzten Unterkapitels werden nicht in den folgenden Lectures verwandt.