Charakteristische Klassen[1]

Magnus Engenhorst

1 Charakteristische Klassen

Sei ein Bündel E gegeben, welches Kriterium kann gefunden werden, um abzuschätzen wie nicht-trivial E ist? Die Antwort darauf sind die charakteristischen Klassen. Wir möchten Faserbündel klassifizieren, indem wir sie mit einem besonderen Bündel vergleichen, das wir universelles Bündel nennen. Wir möchten die Beziehung eines beliebigen Hauptfaserbündels P über einer Mannigfaltigkeit M der Dimension d mit der Gruppe G zum universellen Bündel $\xi(n-k-1, G)$ verstehen. Dieses wird auch universelles (n-k-1)-Bündel genannt. Dessen Basisraum ist $O(n)/G \times O(n-k))$, auch Grassmann-Mannigfaltigkeit von k-dimensionalen Flächen in R^n genannt:

$$Gr(n, k, R) = O(n)/G) \times O(n-k)) \tag{1}$$

Ein Punkt in Gr(n,k,R) entspricht einer k-dimensionalen Fläche durch den Ursprung von R^n. Der total space ist: O(n)/O(n-k). Warum wählen wir gerade dieses universelle Bündel? Zunächst besitzt O(n)/O(n-k) eine Reihe verschwindender Homotopiegruppen:

$$\pi_p(O(n)/O(n-k)) = 0 \text{ für } 0 \leq \text{p} \leq \text{n-k-1} \tag{2}$$

Wir sagen O(n)/O(n-k) ist (n-k-1)-zusammenhängend. Entscheidend ist, dass $\xi(n-k-1, G)$ Hauptfaserbündel P der Gruppe G über Mannigfaltigkeiten M der Dimension $d < n-k-1$ klassifiziert. Da ein triviales Bündel der Gruppe G und der Basis M auch als $M \times G$ geschrieben werden kann, kann

[1]Dies ist die Ausarbeitung des Teils meines Vortrages zu Monopolen und Dualität, der sich mit charakteristischen Klassen und insbesondere mit der Berechnung von Chern-Klassen befasst. Der Votrag fand im Rahmen des Seminars zur Seiberg-Witten-Theorie und effektiven supersymmetrischen Yang-Mills-Theorien im Wintersemester 2004/2005 an der Universität Bonn.

die Nicht-Trivialität des universellen Bündels $\xi(n-k-1,G)$ als das angesehen werden, dass aussagt inwie weit $Gr(n,k,R)\times G$ sich von O(n)/O(n-k), dessen Homotopiegruppen ja für d ¡ n-k-1 verschwinden, unterscheidet. Wir vergleichen nun P mit ξ durch ein induziertes Bündel. Darunter verstehen wir folgendes: Gegeben sei ein Bündel F über den Basisraum Y. Existiert eine Abbildung $f: X \to Y$ so können wir ein Bündel E=f'F über X konstruieren. In unserem Fall ist das eine Abbildung $f: M \to Gr(n,k,R)$ und wir können $f'\xi(n-k-1,G)$ über M aus ξ über Gr(n,k,R) konstruieren. Wir benutzen nun:

Theorem 1.1 *Sei P ein Hauptfaserbündel über M der Dimension dund der Gruppe G, dann gibt es für einen genügend großes n eine Abbildung $f: M \to Gr(n,k,R)$, so dass $f'\xi(n-k-1,G)=P$.*

Wir wählen daher $n \geq d+k+1$. Wir hätten anstatt f'g auch eine andere Abbildung $g'\xi$ wählen können. Wenn g und f homotop sind, so sind die beiden induzierten Bündel $f'\xi$ und $g'\xi$ äquivalent. Wir wollen nun eine Funktion c konstruieren, die uns sagt, wie nicht-trivial ein universelles Bündel ist und diese Funktion dann auf das Hauptfaserbündel, welches wir eigentlich studieren wollen, zurückwerfen. Treffen wir also zwei Voraussetzungen:

$$1. c(P)=c(P') \text{ falls P und P' äquivalent sind } 2. f'c(\xi)=c(f'\xi). \tag{3}$$

Es stellt sich nun heraus, dass beide Bedingungen erfüllt werden können, wenn c(P) ein Element der Kohomologie-Gruppe $H^p(M;R)$ ist. Denn äquivalente Bündel gibt es, wenn f und g homotop sind, denn dann sind P=f'ξ und P'=g'ξ äquivalent. Für c(P), c(P') $\in H^p(M;R)$ folgt mit ein wenig Kohomologie:

$$c(P)=c(f'\xi)=f'c(\xi) \text{ und } c(P')=c(g'\xi)=g'c(\xi). \tag{4}$$

Da f und g homotop sind ist die erste Voraussetzung erfüllt, die zweite bereits implizit. Wir berechnen also die Kohomologie-Gruppe $H^p(o(n)/G\times O(n-k);R)$, um die charakteristische Klasse $c(P)\in H^p(M,R)$ zu berechnen, indem wir auf das Bündel $P=f'\xi$ zurückwerfen.

2 Chern-Klassen

Für G=U(k) sprechen wir von Chern-Klassen. Charakteristische Klassen sind Elemente von $H^p(M,R)$. Das bedeutet, sie sind durch geschlossene, nicht exakte Differentialformen auf M gegeben. In der Tat ist das genau die 2-form F der Krümmung. Denken wir uns diese als $n\times n$ Matrix. Wir können nun charakteristische Klassen bzw. hier die Chern-Klasse durch Polynome in F konstruieren, die Invarianten der Lie-Algebra von G gewählt sind. Damit hängen sie auch nicht von dem Zusammenhang A ab. Entwickeln wir also in einem Parameter t:

$$det(tI + \frac{iF}{2\pi}) = \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}(F)t^j \tag{5}$$

Nun benutzen wir einen Trick. Wir denken uns $iF/2\pi$ als diagonalisiert und nennen diese Matrix X mit den Eigenwerten x_i für i=1...n. Dann gilt:

$$det(tI + X) = \prod_{i=1}^{n}(t + x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}(x)t^j \tag{6}$$

Wir finden:

$$c_0 = 1, c_1 = \sum_{i}^{n} x_i, c_j = \sum_{i_1<i_2<...i_j} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_j}, c_n = x_1...x_n \tag{7}$$

Ersetzen wir nun X durch $iF/2\pi$ so finden wir schließlich ohne Indizes anzugeben:

$$c_0(F) = 1, c_1(F) = \frac{i}{2\pi}TrF, c_2(F) = \frac{1}{2}(\frac{i}{2\pi})^2[TrF \wedge TrF - Tr(F \wedge F)] \tag{8}$$

Für G=SU(2) verschwindet die Spur über die Pauli-Symbole, mit $F = F^a\sigma^a$ vereinfacht sich die Gleichung damit zu:

$$c_2(F) = \frac{1}{8\pi^2}Tr(F \wedge F) \tag{9}$$

Die zweite Chern-Klasse haben wir in der Yang-Mills-Higgs-Theorie und supersymmetrischen Feldtheorien in etwas anderer Schreibweise als θ-Term kennengelernt:

$$\delta L = -\frac{\theta e^2}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu} * F^{a\mu\nu} \tag{10}$$

Dieser ist nach den obigen Überlegungen Element der Kohomologie-Gruppe $H^p(M, R)$ und somit toplogisch. Sie trägt zu den Bewegungsgleichungen nicht bei, hat aber Einfluß auf die Ladung der Dyonen.

3 Literatur

Nakahara, Nash