Darstellungen unendlich-dimensionaler Lie-Algebren

Lie-Algebren unendlich-dimensionaler Matrizen

Nils Carqueville

Überblick

- zentrale Erweiterung

Überblick

- zentrale Erweiterung
- Lie-Algebren unendlich-dimensionaler Matrizen

Überblick

- zentrale Erweiterung
- Lie-Algebren unendlich-dimensionaler Matrizen
- Konstruktion eines geeigneten Darstellungsraumes

Überblick

- zentrale Erweiterung
- Lie-Algebren unendlich-dimensionaler Matrizen
- Konstruktion eines geeigneten Darstellungsraumes
- Darstellungen „neuer“ Lie-Algebren

Überblick

- zentrale Erweiterung
- Lie-Algebren unendlich-dimensionaler Matrizen
- Konstruktion eines geeigneten Darstellungsraumes
- Darstellungen „neuer“ Lie-Algebren
- Darstellungen „alter“ Lie-Algebren

Erinnerung

Unendlich-dimensionale Lie-Algebren:

Oszillator-Algebra $\mathcal{A} = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{Z}\,;\ \hbar\}$ mit

$$\big[\hbar\,,\ a_n\big] = 0\,, \qquad \big[a_m\,,\ a_n\big] = m\,\delta_{m+n}\,\hbar$$

Erinnerung

Unendlich-dimensionale Lie-Algebren:

Oszillator-Algebra $\mathcal{A} = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{Z}\,;\ \hbar\}$ mit

$$\left[\hbar\,,\ a_n\right] = 0\,, \qquad \left[a_m\,,\ a_n\right] = m\,\delta_{m+n}\,\hbar$$

Witt-Algebra

$$\mathfrak{d} = \mathbb{C}\left\{d_n = -z^{n+1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ :\ n \in \mathbb{Z}\,;\ \left[d_m\,,\ d_n\right] = (m-n)\,d_{m+n}\right\}$$

mit Darstellung auf $V_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}\{v_k = z^{k+\alpha}\,(\mathrm{d}z)^\beta\}$:

$$d_n(v_k) = (k - \alpha - \beta\,(n+1))\,v_{k-n}$$

Erinnerung

Unendlich-dimensionale Lie-Algebren:

Witt-Algebra

$$\mathfrak{d} = \mathbb{C}\left\{ d_n = -z^{n+1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \;:\; n \in \mathbb{Z}\,;\; \left[d_m\,,\, d_n \right] = (m-n)\, d_{m+n} \right\}$$

mit Darstellung auf $V_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}\{v_k = z^{k+\alpha}\,(\mathrm{d}z)^{\beta}\}$:

$$d_n(v_k) = \big(k - \alpha - \beta\,(n+1)\big)\, v_{k-n}$$

Erinnerung

Unendlich-dimensionale Lie-Algebren:

Witt-Algebra

$$\mathfrak{d} = \mathbb{C}\left\{ d_n = -z^{n+1}\,\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z} \;:\; n \in \mathbb{Z}\,;\; \Big[d_m\,,\,d_n\Big] = (m-n)\,d_{m+n} \right\}$$

mit Darstellung auf $V_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}\{v_k = z^{k+\alpha}\,(\mathsf{d}z)^\beta\}$:

$$d_n(v_k) = \big(k - \alpha - \beta\,(n+1)\big)\,v_{k-n}$$

Virasoro-Algebra $\mathbf{Vir} = \mathfrak{d} \oplus \mathbb{C}\,c$

Erinnerung

Unendlich-dimensionale Lie-Algebren:

Witt-Algebra

$$\mathfrak{d} = \mathbb{C}\left\{ d_n = -z^{n+1}\,\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z} \;:\; n \in \mathbb{Z}\,;\; \left[d_m\,,\,d_n\right] = (m-n)\,d_{m+n} \right\}$$

mit Darstellung auf $V_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}\{v_k = z^{k+\alpha}\,(\mathsf{d}z)^{\beta}\}$:

$$d_n(v_k) = \left(k - \alpha - \beta\,(n+1)\right) v_{k-n}$$

Virasoro-Algebra $\mathbf{Vir} = \mathfrak{d} \oplus \mathbb{C}\,c$ mit

$$\left[d_m\,,\,c\right] = 0\,, \qquad \left[d_m\,,\,d_n\right] = (m-n)\,d_{m+n} + \delta_{m+n}\,\frac{m^3-m}{12}\,c$$

zentrale Erweiterung

Definition: Sei $\mathfrak{a}$ eine Abelsche Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{C}$. Eine exakte Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

heißt zentrale Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$, wenn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] = 0$.

zentrale Erweiterung

Definition: Sei $\mathfrak{a}$ eine Abelsche Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{C}$. Eine exakte Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

heißt zentrale Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$, wenn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] = 0$.

Uns interessiert nur der Fall $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$.

zentrale Erweiterung

Definition: Sei $\mathfrak{a}$ eine Abelsche Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{C}$. Eine exakte Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

heißt zentrale Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$, wenn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] = 0$.

Betrachte folgende Eigenschaften einer Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$:

($\heartsuit$) Θ ist bilinear und alternierend

($\spadesuit$) $\Theta(a, [b, c]) + \Theta(b, [c, a]) + \Theta(c, [a, b]) = 0$

zentrale Erweiterung

Betrachte folgende Eigenschaften einer Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$:

($\heartsuit$) Θ ist bilinear und alternierend

($\spadesuit$) $\Theta(a, [b, c]) + \Theta(b, [c, a]) + \Theta(c, [a, b]) = 0$

zentrale Erweiterung

Betrachte folgende Eigenschaften einer Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$:

$(\heartsuit)$ Θ ist bilinear und alternierend

$(\spadesuit)$ $\Theta\,(a,[b,c]) + \Theta\,(b,[c,a]) + \Theta\,(c,[a,b]) = 0$

Definition:

$$C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \Theta \text{ erfüllt } (\heartsuit)\right\}$$

$$Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \left\{\Theta \in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \;:\; \Theta \text{ erfüllt } (\spadesuit)\right\}$$

$$B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \exists \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) : \Theta(a,b) = \mu([a,b])\right\}$$

$$H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})/B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$$

zentrale Erweiterung

Betrachte folgende Eigenschaften einer Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$:

$(\heartsuit)$ Θ ist bilinear und alternierend

$(\spadesuit)$ $\Theta(a, [b, c]) + \Theta(b, [c, a]) + \Theta(c, [a, b]) = 0$

Definition: Koketten

$$C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \ : \ \Theta \text{ erfüllt } (\heartsuit)\right\}$$

$$Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \ : \ \Theta \text{ erfüllt } (\spadesuit)\right\}$$

$$B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \ : \ \exists \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) : \ \Theta(a, b) = \mu([a, b])\right\}$$

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) / B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$$

zentrale Erweiterung

Betrachte folgende Eigenschaften einer Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$:

$(\heartsuit)$ Θ ist bilinear und alternierend

$(\spadesuit)$ $\Theta(a, [b, c]) + \Theta(b, [c, a]) + \Theta(c, [a, b]) = 0$

Definition: Koketten, Kozykeln

$$C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \ : \ \Theta \text{ erfüllt } (\heartsuit)\right\}$$

$$Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \ : \ \Theta \text{ erfüllt } (\spadesuit)\right\}$$

$$B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \ : \ \exists \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) : \ \Theta(a, b) = \mu([a, b])\right\}$$

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})/B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$$

zentrale Erweiterung

Betrachte folgende Eigenschaften einer Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$:

$(\heartsuit)$ Θ ist bilinear und alternierend

$(\spadesuit)$ $\Theta\,(a, [b, c]) + \Theta\,(b, [c, a]) + \Theta\,(c, [a, b]) = 0$

Definition: Koketten, Kozykeln, Koränder

$$C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \Theta \text{ erfüllt } (\heartsuit)\right\}$$

$$Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \;:\; \Theta \text{ erfüllt } (\spadesuit)\right\}$$

$$B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \exists \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) : \Theta(a, b) = \mu([a, b])\right\}$$

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})/B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$$

zentrale Erweiterung

Betrachte folgende Eigenschaften einer Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$:

$(\heartsuit)$ Θ ist bilinear und alternierend

$(\spadesuit)$ $\Theta(a, [b, c]) + \Theta(b, [c, a]) + \Theta(c, [a, b]) = 0$

Definition: Koketten, Kozykeln, Koränder, Kohomologiegruppe

$$C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \Theta \text{ erfüllt } (\heartsuit)\right\}$$

$$Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \;:\; \Theta \text{ erfüllt } (\spadesuit)\right\}$$

$$B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \exists \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) : \Theta(a, b) = \mu([a, b])\right\}$$

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) / B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$$

zentrale Erweiterung

Allgemeinere Situation:

$$C^r(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{ \Theta : \times_{i=1}^{r} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a} \ : \ \Theta \ \ r\text{-linear und alternierend} \right\}$$

zentrale Erweiterung

Allgemeinere Situation:

$$C^r(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \left\{\Theta : \times_{i=1}^r \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \Theta \;\; r\text{-linear und alternierend}\right\}$$

Definiere Korand-Operator $\delta_r : C^r(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \to C^{r+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ durch

$$\begin{aligned}(\delta_r\Theta)(a_1, \ldots, a_{r+1}) \overset{\text{def}}{=} & \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} a_i \, \Theta(a_1, \ldots, \widehat{a}_i, \ldots, a_{r+1}) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \, \Theta([a_i, a_j], a_1, \ldots, \widehat{a}_i, \ldots, \widehat{a}_j, \ldots, a_{r+1})\end{aligned}$$

zentrale Erweiterung

Allgemeinere Situation:

$$C^r(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \;:=\; \left\{\Theta : \times_{i=1}^r \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \;:\; \Theta \;\; r\text{-linear und alternierend}\right\}$$

Definiere Korand-Operator $\delta_r : C^r(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \to C^{r+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ durch

$$\begin{aligned}(\delta_r\Theta)(a_1,\ldots,a_{r+1}) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; & \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\, a_i\,\Theta(a_1,\ldots,\widehat{a}_i,\ldots,a_{r+1}) \\ & + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\Theta([a_i,a_j],a_1,\ldots,\widehat{a}_i,\ldots,\widehat{a}_j,\ldots,a_{r+1})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad Z^r(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \;=\; \ker\delta_r \qquad \text{und} \qquad B^r(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \;=\; \operatorname{im}\delta_{r-1}$$

zentrale Erweiterung

Jedes $\Theta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ „erzeugt“ eine zentrale Erweiterung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$.

zentrale Erweiterung

Jedes $\Theta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ „erzeugt“ eine zentrale Erweiterung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$.

Die Abbildung $\Theta : \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \to \mathbb{C}$ mit

$$\Theta(d_m, d_n) \overset{\text{def}}{=} \delta_{m+n} \frac{m^3 - m}{12}$$

liefert eine (bis auf Äquivalenz eindeutige) zentrale Erweiterung von $\mathfrak{d}$ durch $\mathbb{C}$.

zentrale Erweiterung

Jedes $\Theta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ „erzeugt“ eine zentrale Erweiterung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$.

Die Abbildung $\Theta : \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \to \mathbb{C}$ mit

$$\Theta(d_m, d_n) \overset{\text{def}}{=} \delta_{m+n} \frac{m^3 - m}{12}$$

liefert eine (bis auf Äquivalenz eindeutige) zentrale Erweiterung von $\mathfrak{d}$ durch $\mathbb{C}$.

$$\boldsymbol{H^2(\mathfrak{d}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}}$$

Grundlegendes

$$V := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C} v_j = \left\{ \sum_{j\in J} b_j v_j \,:\, b_j \in \mathbb{C}\,;\ |J| < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad v_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Grundlegendes

$$V := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}v_j = \left\{ \sum_{j\in J} b_j v_j \; : \; b_j \in \mathbb{C} \, ; \; |J| < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad v_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Nur *endliche* Linearkombinationen kommen vor!

Grundlegendes

$$V := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} v_j = \left\{ \sum_{j \in J} b_j v_j \; : \; b_j \in \mathbb{C} \, ; \; |J| < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad v_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Grundlegendes

$$V := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}v_j = \left\{ \sum_{j\in J} b_j v_j \;:\; b_j \in \mathbb{C};\ |J| < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad v_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{gl}_\infty := \left\{ (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für fast alle } (i,j) \right\}$$

Grundlegendes

$$V := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} v_j = \left\{ \sum_{j \in J} b_j v_j \ : \ b_j \in \mathbb{C};\ |J| < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad v_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{gl}_\infty := \left\{ (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \ : \ a_{ij} = 0 \text{ für fast alle } (i,j) \right\}$$

Grundlegendes

$$V := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C} v_j = \left\{ \sum_{j\in J} b_j v_j \;:\; b_j \in \mathbb{C};\ |J| < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad v_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{gl}_\infty := \left\{ (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für fast alle } (i,j) \right\}$$

Mit dem Matrixkommutator als Lie-Klammer ist $\mathfrak{gl}_\infty$ eine Lie-Algebra.

Grundlegendes

$$\mathfrak{gl}_\infty = \mathbb{C}\Big\{E_{ij} \;:\; i,j\in\mathbb{Z}\Big\} \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ \dots & 0 & 1_{ij} & 0 & \dots \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Grundlegendes

$$\mathfrak{gl}_\infty = \mathbb{C}\left\{E_{ij} \,:\, i,j \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ \ldots & 0 & 1_{ij} & 0 & \ldots \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Es gilt $E_{ij}\, v_k = \delta_{jk}\, v_i$ und $E_{ij}\, E_{mn} = \delta_{jm}\, E_{in}$, und somit die Vertauschungsrelationen

$$\left[E_{ij}\,,\,E_{mn}\right] = \delta_{jm}\, E_{in} - \delta_{ni}\, E_{mj}\ .$$

Grundlegendes

$$\mathfrak{gl}_\infty = \mathbb{C}\left\{E_{ij} \;:\; i, j \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ \dots & 0 & 1_{ij} & 0 & \dots \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Es gilt $E_{ij}\, v_k = \delta_{jk}\, v_i$ und $E_{ij}\, E_{mn} = \delta_{jm}\, E_{in}$, und somit die **Vertauschungsrelationen**

$$\left[E_{ij}\,,\, E_{mn}\right] = \delta_{jm}\, E_{in} - \delta_{ni}\, E_{mj}\ .$$

Grundlegendes

$\mathfrak{gl}_\infty$ ist in der größeren Lie-Algebra $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten.

$$\overline{\mathfrak{a}}_\infty := \left\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0\right\}$$

Grundlegendes

$\mathfrak{gl}_\infty$ ist in der größeren Lie-Algebra $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten.

$$\overline{\mathfrak{a}}_\infty := \left\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0\right\}$$

Grundlegendes

$\mathfrak{gl}_\infty$ ist in der größeren Lie-Algebra $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten.

$$\overline{\mathfrak{a}}_\infty := \left\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0\right\}$$

Die Shift-Operatoren Λ_k vertauschen die Basisvektoren:

$\Lambda_k v_j \overset{\text{def}}{=} v_{j-k}$.

Grundlegendes

$\mathfrak{gl}_\infty$ ist in der größeren Lie-Algebra $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten.

$$\overline{\mathfrak{a}}_\infty := \left\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0\right\}$$

Die Shift-Operatoren Λ_k vertauschen die Basisvektoren:
$\Lambda_k v_j \stackrel{\text{def}}{=} v_{j-k}$.

$$\Lambda_k v_j = v_{j-k} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{i+k,j} v_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+k} v_j$$

Grundlegendes

$\mathfrak{gl}_\infty$ ist in der größeren Lie-Algebra $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten.

$$\bar{\mathfrak{a}}_\infty := \left\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \,:\, a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0\right\}$$

Die Shift-Operatoren Λ_k vertauschen die Basisvektoren:
$\Lambda_k v_j \stackrel{\text{def}}{=} v_{j-k}$.

$$\boldsymbol{\Lambda_k} v_j = v_{j-k} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{i+k,j} v_i = \sum_{\boldsymbol{i\in\mathbb{Z}}} \boldsymbol{E_{i,i+k}} v_j$$

Grundlegendes

$\mathfrak{gl}_\infty$ ist in der größeren Lie-Algebra $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten.

$$\bar{\mathfrak{a}}_\infty := \left\{ (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \; : \; a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0 \right\}$$

Die Shift-Operatoren Λ_k vertauschen die Basisvektoren:
$\Lambda_k v_j \overset{\text{def}}{=} v_{j-k}$.

$$\boldsymbol{\Lambda_k} v_j = v_{j-k} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{i+k,j} v_i = \sum_{\boldsymbol{i\in\mathbb{Z}}} \boldsymbol{E_{i,i+k}} v_j$$

$$\Rightarrow \Lambda_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+k} = \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \\ & & & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Grundlegendes

Die Λ_k bilden eine kommutative Unteralgebra von $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$:

$$\left[\Lambda_k\,,\,\Lambda_l\right] \;=\; 0$$

Grundlegendes

Die Λ_k bilden eine kommutative Unteralgebra von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$:

$$\left[\Lambda_k\,,\,\Lambda_l\right] \;=\; 0$$

Auch $\mathfrak{d}$ ist in $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten:

$$\begin{aligned} d_n(v_j) &= (j-\alpha-\beta\,(n+1))\,v_{j-n} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k-\alpha-\beta\,(n+1))\,\delta_{kj}\,v_{k-n} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k-\alpha-\beta\,(n+1))\,E_{k-n,k}\;v_j \end{aligned}$$

Grundlegendes

Die Λ_k bilden eine kommutative Unteralgebra von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$:

$$\left[\Lambda_k\,,\,\Lambda_l\right] \;=\; 0$$

Auch $\mathfrak{d}$ ist in $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ enthalten:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d_n}(v_j) &= \left(j-\alpha-\beta\,(n+1)\right) v_{j-n} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k-\alpha-\beta\,(n+1))\,\delta_{kj}\,v_{k-n} \\
&= \boldsymbol{\sum_{k\in\mathbb{Z}} (k-\alpha-\beta\,(n+1))\,E_{k-n,k}}\; v_j
\end{aligned}$$

Diracsche Löchertheorie

Die freie Dirac-Gleichung $\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi = 0$ taugt nicht gut für Ein-Teilchen-Theorie.

Diracsche Löchertheorie

Die freie Dirac-Gleichung $\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi = 0$ taugt nicht gut für Ein-Teilchen-Theorie.

Sie hat Lösungen $\Psi^{(\mp)} = u\,\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,p\cdot x}$, das führt zu Instabilität.

Diracsche Löchertheorie

Die freie Dirac-Gleichung $\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi = 0$ taugt nicht gut für Ein-Teilchen-Theorie.

Sie hat Lösungen $\Psi^{(\mp)} = u\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,p\cdot x}$, das führt zu Instabilität.

Diracsche Löchertheorie

Die freie Dirac-Gleichung $\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \Psi = 0$ taugt nicht gut für Ein-Teilchen-Theorie.

Sie hat Lösungen $\Psi^{(\mp)} = u\,\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,p\cdot x}$, das führt zu Instabilität.

Diracs Idee: *Fast alle* Zustände $\Psi^{(-)}$ sind besetzt! $\Psi^{(-)}$–Löcher werden interpretiert als Antiteilchen.

Diracsche Löchertheorie

Die freie Dirac-Gleichung $\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi = 0$ taugt nicht gut für Ein-Teilchen-Theorie.

Sie hat Lösungen $\Psi^{(\mp)} = u\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\, p\cdot x}$, das führt zu Instabilität.

Diracs Idee: *Fast alle* Zustände $\Psi^{(-)}$ sind besetzt! $\Psi^{(-)}$–Löcher werden interpretiert als Antiteilchen.

Die Theorie ermöglicht auch *Annihilation* und *Paarerzeugung*, behandelt aber Teilchen und Antiteilichen unsymmetrisch, daher echte Quantenfeldtheorie nötig. . .

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Die Dirac-Theorie dient als Motivation für das Folgende.

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Die Dirac-Theorie dient als Motivation für das Folgende.

V : Zustandsraum *eines* Elektrons

v_j : 1-Teilchen-Zustand mit Energie j

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Die Dirac-Theorie dient als Motivation für das Folgende.

$$\begin{array}{lcl} V & : & \text{Zustandsraum } \textit{eines} \text{ Elektrons} \\ v_j & : & \text{1-Teilchen-Zustand mit Energie } j \end{array}$$

Wegen des Pauli-Prinzips liegen alle Viel-Teilchen-Zustände im Raum $\Lambda^\infty V$, etwa das Vakuum

$$\psi_0 := v_0 \wedge v_{-1} \wedge v_{-2} \wedge \ldots .$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} := \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\;;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1\right\}$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} := \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \,:\, i_0 > i_{-1} > \ldots;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1\right\}$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} := \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\,;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1\right\}$$

endlich viele Positronen

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} \;:=\; \mathbb{C}\left\{ v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\;;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1 \right\}$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} \ := \ \mathbb{C}\left\{ v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \ : \ i_0 > i_{-1} > \ldots \ ; \ i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1 \right\}$$

$\psi \in F^{(0)}$ enthält eine gleiche Anzahl von Elektronen und Positronen:

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} := \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\,;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1\right\}$$

$\psi \in F^{(0)}$ enthält eine gleiche Anzahl von Elektronen und Positronen:

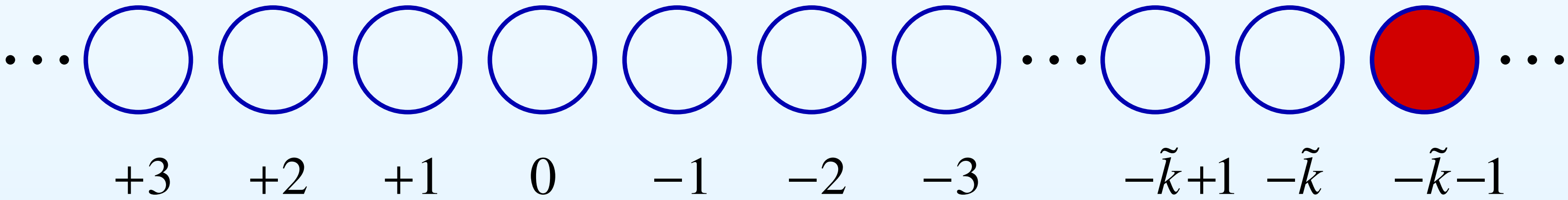
Sei etwa $i_{-k} = k$ für alle $k > \tilde{k}$.

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} := \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\,;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1\right\}$$

$\psi \in F^{(0)}$ enthält eine gleiche Anzahl von Elektronen und Positronen:

Sei etwa $i_{-k} = k$ für alle $k > \tilde{k}$.



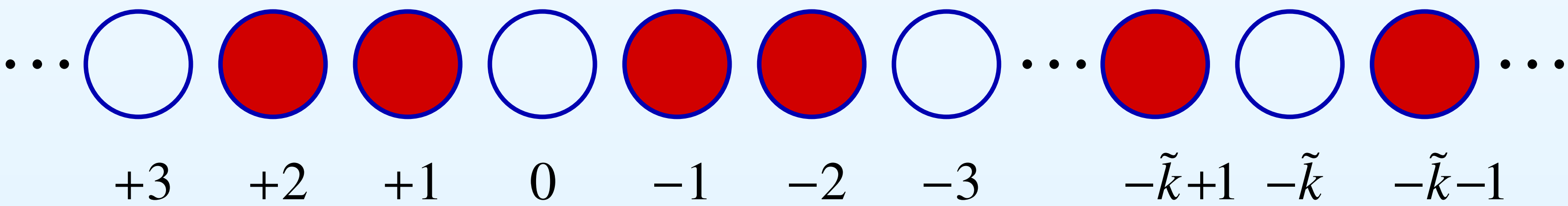
Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} := \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \,:\, i_0 > i_{-1} > \ldots\,;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1\right\}$$

$\psi \in F^{(0)}$ enthält eine gleiche Anzahl von Elektronen und Positronen:

Sei etwa $i_{-k} = k$ für alle $k > \tilde{k}$.

$\tilde{k} - l$ besetzt $\qquad$ l besetzt $\Rightarrow$ $\tilde{k} - l$ unbesetzt



Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(0)} := \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\, ;\; i_{-k} = -k \text{ für } k \gg 1\right\}$$

$\psi \in F^{(0)}$ enthält eine gleiche Anzahl von Elektronen und Positronen:

Maß für den Grad der Anregung von $\psi = v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in F^{(0)}$:

$$\deg \psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{s=0 \\ i_s > 0 \text{ tritt auf}}}^{\infty} i_s \;-\; \sum_{\substack{s=0 \\ i_s \le 0 \text{ tritt nicht auf}}}^{\infty} i_s \;=\; \sum_{s=0}^{\infty} (i_{-s} + s)$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Wie ist $F^{(0)}$ strukturiert?

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Wie ist $F^{(0)}$ strukturiert?

Betrachte *Zerlegung* $\{k_0\,,\ k_1\,,\ \ldots\,,\ k_{n-1}\} \subset \mathbb{Z}$ von $k \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$k \;=\; k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1} \qquad \text{und} \qquad k_0 \le k_1 \le \ldots \le k_{n-1}\ .$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Wie ist $F^{(0)}$ strukturiert?

Betrachte *Zerlegung* $\{k_0\,,\ k_1\,,\ \ldots\,,\ k_{n-1}\} \subset \mathbb{Z}$ von $k \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$k \;=\; k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1} \qquad \text{und} \qquad k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_{n-1}\ .$$

Dies liefert eindeutig einen Vektor aus $F^{(0)}$:

$$\psi_{\{k\}} \;:=\; v_{k_0} \wedge v_{k_1-1} \wedge \ldots \wedge v_{k_{n-1}-(n-1)} \wedge v_{-n} \wedge v_{-n-1} \wedge \ldots$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Wie ist $F^{(0)}$ strukturiert?

Betrachte *Zerlegung* $\{k_0\,,\ k_1\,,\ \ldots\,,\ k_{n-1}\} \subset \mathbb{Z}$ von $k \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$k \ = \ k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1} \quad \text{und} \quad k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_{n-1}\ .$$

Dies liefert eindeutig einen Vektor aus $F^{(0)}$:

$$\psi_{\{k\}} \ := \ v_{k_0} \wedge v_{k_1-1} \wedge \ldots \wedge v_{k_{n-1}-(n-1)} \wedge v_{-n} \wedge v_{-n-1} \wedge \ldots$$

Offenbar gilt $\deg \psi_{\{k\}} = \sum_{s=0}^{\infty}(i_{-s} + s) = k$.

Jedes ψ mit $\deg \psi = k$ lässt sich so schreiben, also:

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Mit $F_k^{(0)} := \mathbb{C}\left\{\psi \in F^{(0)} \;:\; \deg \psi = k\right\}$ gilt:

(i) $F^{(0)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} F_k^{(0)}$, wobei $F_0^{(0)} := \mathbb{C}\psi_0$

(ii) $\dim F_k^{(0)} = p(k) = \sharp\left(\text{Zerlegungen von } k\right)$

(iii) $\dim_q F^{(0)} \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(\dim F_k^{(0)}\right) q^k = \dfrac{1}{\varphi(q)} \equiv \left[\prod_{j \in \mathbb{N}} (1 - q^j)\right]^{-1}$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Rademacher-Formel:

$$p(n) \;=\; \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\,\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right]$$

$$A_k(n) \;:=\; \sum_{h=1}^{k} \delta_{\mathrm{GCD}(h,k),1}\,\exp\left[\pi\,\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{k}\left(\frac{hj}{k}-\left\lfloor\frac{hj}{k}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right)-\frac{2\pi\mathrm{i}hn}{k}\right]$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Definiere nun einen Raum, der *alle* Zustände mit endlich vielen Positronen enthält:

$$\begin{aligned} F &:= \mathbb{C}\left\{ v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\,;\; \Big| \mathbb{Z}_- \backslash \{i_0, i_{-1}, \ldots\} \Big| < \infty \right\} \\ &\equiv \mathbb{C}\left\{ \text{ semi-infinite Monome (sim) } \right\} \end{aligned}$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Definiere nun einen Raum, der *alle* Zustände mit endlich vielen Positronen enthält:

$$\begin{aligned} F \quad &:= \quad \mathbb{C}\left\{ v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\,;\; \left| \mathbb{Z}_- \backslash \{i_0, i_{-1}, \ldots\} \right| < \infty \right\} \\ &\equiv \quad \mathbb{C}\left\{ \text{ semi-infinite Monome (sim) } \right\} \end{aligned}$$

F zerfällt in Teilräume, $F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^{(m)}$, wobei

$$F^{(m)} \;:=\; \mathbb{C}\left\{ v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots\,;\; i_k = k+m \text{ für } k \ll 0 \right\}.$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Definiere nun einen Raum, der *alle* Zustände mit endlich vielen Positronen enthält:

$$\begin{aligned} F \quad &:= \quad \mathbb{C}\left\{ v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots \;;\; \Big| \mathbb{Z}_- \backslash \{i_0, i_{-1}, \ldots\} \Big| < \infty \right\} \\ &\equiv \quad \mathbb{C}\left\{ \text{semi-infinite Monome (sim)} \right\} \end{aligned}$$

F zerfällt in Teilräume, $F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^{(m)}$, wobei

$$F^{(m)} := \mathbb{C}\left\{ v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots \;;\; i_k = k + m \text{ für } k \ll 0 \right\}$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Definiere nun einen Raum, der *alle* Zustände mit endlich vielen Positronen enthält:

$$\begin{aligned} F \quad &:= \quad \mathbb{C}\left\{ v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots \;;\; \Big| \mathbb{Z}_- \backslash \{i_0, i_{-1}, \ldots\} \Big| < \infty \right\} \\ &\equiv \quad \mathbb{C}\left\{ \text{ semi-infinite Monome (sim) } \right\} \end{aligned}$$

F zerfällt in Teilräume, $F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^{(m)}$, wobei

$$F^{(m)} \;:=\; \mathbb{C}\left\{ v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots \;;\; i_k = k + m \text{ für } k \ll 0 \right\}$$

Das Referenz-Vakuum $\psi_m \in F^{(m)}$ spielt eine besondere Rolle,

$$\psi_m \;:=\; v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots \;.$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Definiere nun einen Raum, der *alle* Zustände mit endlich vielen Positronen enthält:

$$F \;:=\; \mathbb{C}\left\{v_{i_0} \wedge v_{i_{-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_0 > i_{-1} > \ldots\,;\; \left|\mathbb{Z}_-\backslash\{i_0, i_{-1}, \ldots\}\right| < \infty\right\}$$

$$\equiv\; \mathbb{C}\left\{\text{ semi-infinite Monome (sim) }\right\}$$

F zerfällt in Teilräume, $F = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F^{(m)}$, wobei

$$F^{(m)} \;:=\; \mathbb{C}\left\{v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots\,;\; i_k = k + m \text{ für } k \ll 0\right\}$$

Das Referenz-Vakuum $\psi_m \in F^{(m)}$ spielt eine besondere Rolle,

$$\psi_m \;:=\; v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots\,.$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(m)} \;=\; \mathbb{C}\Big\{\psi = v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots\;;\; i_k = k+m \text{ für } k \ll 0\Big\}$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(m)} = \mathbb{C}\Big\{\psi = v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots\,;\; i_k = k+m \text{ für } k \ll 0\Big\}$$

Der Grad von $\psi \in F^{(m)}$ wird analog zu $m = 0$ definiert:

$$\deg \psi \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{s=0 \\ i_s > m \text{ tritt auf}}}^{\infty} i_s - \sum_{\substack{s=0 \\ i_s \leq m \text{ tritt nicht auf}}}^{\infty} i_s = \sum_{s=0}^{\infty} (i_{-s} + s - m)$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(m)} = \mathbb{C}\Big\{\psi = v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots\;;\; i_k = k+m \text{ für } k \ll 0\Big\}$$

Der Grad von $\psi \in F^{(m)}$ wird analog zu $m = 0$ definiert:

$$\deg\psi \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{s=0 \\ i_s > m \text{ tritt auf}}}^{\infty} i_s - \sum_{\substack{s=0 \\ i_s \le m \text{ tritt nicht auf}}}^{\infty} i_s = \sum_{s=0}^{\infty} (i_{-s} + s - m)$$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

$$F^{(m)} = \mathbb{C}\Big\{\psi = v_{i_m} \wedge v_{i_{m-1}} \wedge \ldots \in \Lambda^\infty V \;:\; i_m > i_{m-1} > \ldots\,;\; i_k = k+m \text{ für } k \ll 0\Big\}$$

Der Grad von $\psi \in F^{(m)}$ wird analog zu $m = 0$ definiert:

$$\deg \psi \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{s=0 \\ i_s > m \text{ tritt auf}}}^{\infty} i_s - \sum_{\substack{s=0 \\ i_s \leq m \text{ tritt nicht auf}}}^{\infty} i_s = \sum_{s=0}^{\infty} (i_{-s} + s - m)$$

Und überhaupt ist Vieles analog:

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Mit $F_k^{(m)} := \mathbb{C}\left\{\psi \in F^{(m)} \;:\; \deg\psi = k\right\}$ gilt:

(i) $F^{(m)} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} F_k^{(m)}$, wobei $F_0^{(m)} := \mathbb{C}\psi_m$

(ii) $\dim F_k^{(m)} = p(k)$

(iii) $\dim_q F^{(m)} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\dim F_k^{(m)}\right) q^k = \frac{1}{\varphi(q)} \equiv \left[\prod_{j\in\mathbb{N}}(1-q^j)\right]^{-1}$

Dirac-Löcher in $\Lambda^\infty V$

Mit $F_k^{(m)} := \mathbb{C}\left\{\psi \in F^{(m)} \ : \ \deg \psi = k\right\}$ gilt:

(i) $F^{(m)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} F_k^{(m)}$, wobei $F_0^{(m)} := \mathbb{C}\psi_m$

(ii) $\dim F_k^{(m)} = p(k)$

(iii) $\dim_q F^{(m)} \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(\dim F_k^{(m)}\right) q^k = \frac{1}{\varphi(q)} \equiv \left[\prod_{j \in \mathbb{N}} (1 - q^j)\right]^{-1}$

$$\Rightarrow F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} F_k^{(m)}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Definiere Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F:

$$\rho(a)(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) \overset{\text{def}}{=} a\,v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots + v_{i_1} \wedge a\,v_{i_2} \wedge \ldots + \ldots$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Definiere Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F:

$$\rho(a)(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) \overset{\text{def}}{=} a\, v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots + v_{i_1} \wedge a\, v_{i_2} \wedge \ldots + \ldots$$

$\rho(a)$ wirkt wie eine Derivation.

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Definiere Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F:

$$\rho(a)(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} a\, v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots + v_{i_1} \wedge a\, v_{i_2} \wedge \ldots + \ldots$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Definiere Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F:

$$\rho(a)(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) \overset{\text{def}}{=} a\,v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots + v_{i_1} \wedge a\,v_{i_2} \wedge \ldots + \ldots$$

Wegen $E_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$ gilt für die Basis

$$\rho(E_{ij})(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \notin \{i_l\}_{l\in\mathbb{N}}\,, \\ v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_{k-1}} \wedge v_i \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \ldots & \text{für } j = i_k. \end{cases}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Definiere Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F:

$$\rho(a)(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots) \overset{\text{def}}{=} a\,v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots + v_{i_1} \wedge a\,v_{i_2} \wedge \dots + \dots$$

Wegen $E_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$ gilt für die Basis

$$\rho(E_{ij})(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \notin \{i_l\}_{l\in\mathbb{N}}\,, \\ v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{k-1}} \wedge v_i \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \dots & \text{für } j = i_k. \end{cases}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Definiere Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F:

$$\rho(a)(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} a\, v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots + v_{i_1} \wedge a\, v_{i_2} \wedge \ldots + \ldots$$

Wegen $E_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i$ gilt für die Basis

$$\rho(E_{ij})(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \notin \{i_l\}_{l \in \mathbb{N}}\,, \\ v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_{k-1}} \wedge v_i \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \ldots & \text{für } j = i_k. \end{cases}$$

Die $\rho(E_{ij})$ bilden die Unterräume $F^{(m)}$ in sich ab:

$$\rho_m(E_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(E_{ij})\big|_{F^{(m)}} : F^{(m)} \longrightarrow F^{(m)}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Definiere Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F:

$$\rho\,(a)\,(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) \overset{\text{def}}{=} a\,v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots \;+\; v_{i_1} \wedge a\,v_{i_2} \wedge \ldots \;+\; \ldots$$

Wegen $E_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$ gilt für die Basis

$$\rho\,(E_{ij})\,(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \notin \{i_l\}_{l \in \mathbb{N}}\,, \\ v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_{k-1}} \wedge v_i \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \ldots & \text{für } j = i_k. \end{cases}$$

Die $\rho(E_{ij})$ bilden die Unterräume $F^{(m)}$ in sich ab:

$$\rho_m\,(E_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \rho\,(E_{ij})\big|_{F^{(m)}} \;:\; F^{(m)} \longrightarrow F^{(m)}$$

Damit ist ρ direkte Summe der ρ_m, $\rho = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \rho_m$.

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Durch ρ lässt sich jedes semi-infinite Monom

$$\psi = v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots \in F^{(m)}$$

aus dem Referenz-Vakuum $\psi_m = v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots$ konstruieren:

$$\begin{aligned}
& \rho(E_{i_m,m}) \ldots \rho(E_{i_{m-k},m-k})(v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \rho(E_{i_m,m}) \ldots \rho(E_{i_{m-k+1},m-k+1})(v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \ldots \\
= \quad & v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge v_{m-k-2} \wedge \ldots \\
= \quad & \psi
\end{aligned}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Durch ρ lässt sich jedes semi-infinite Monom

$$\psi = v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots \in F^{(m)}$$

aus dem Referenz-Vakuum $\psi_m = v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots$ konstruieren:

$$\begin{aligned}
& \rho(E_{i_m,m}) \ldots \rho(E_{i_{m-k},m-k})(v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \rho(E_{i_m,m}) \ldots \rho(E_{i_{m-k+1},m-k+1})(v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \ldots \\
= \quad & v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge v_{m-k-2} \wedge \ldots \\
= \quad & \psi
\end{aligned}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Durch ρ lässt sich jedes semi-infinite Monom

$$\psi = v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots \in F^{(m)}$$

aus dem Referenz-Vakuum $\psi_m = v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots$ konstruieren:

$$\begin{aligned}
& \rho(E_{i_m,m}) \ldots \rho(E_{i_{m-k},m-k})(v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \rho(E_{i_m,m}) \ldots \rho(E_{i_{m-k+1},m-k+1})(v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \ldots \\
= \quad & v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge v_{m-k-2} \wedge \ldots \\
= \quad & \psi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots = \rho(E_{i_m,m}) \ldots \rho(E_{i_{m-k},m-k})\, \psi_m$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

Durch ρ lässt sich jedes semi-infinite Monom

$$\psi = v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots \in F^{(m)}$$

aus dem Referenz-Vakuum $\psi_m = v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots$ konstruieren:

$$\begin{aligned}
& \rho\left(E_{i_m,m}\right) \ldots \rho\left(E_{i_{m-k},m-k}\right)(v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \rho\left(E_{i_m,m}\right) \ldots \rho\left(E_{i_{m-k+1},m-k+1}\right)(v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots) \\
= \quad & \ldots \\
= \quad & v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge v_{m-k-2} \wedge \ldots \\
= \quad & \psi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; v_{i_m} \wedge \ldots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots = \rho\left(E_{i_m,m}\right) \ldots \rho\left(E_{i_{m-k},m-k}\right) \psi_m$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Unitarität

Definiere positiv definite Hermitesche Form $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ auf F durch

$$\Big\langle (\mathrm{sim})_x \Big| (\mathrm{sim})_y \Big\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{xy} \ .$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Unitarität

Definiere positiv definite Hermitesche Form $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ auf F durch

$$\left\langle\, (\mathrm{sim})_x \,\middle|\, (\mathrm{sim})_y \,\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{xy}\ .$$

Die Form $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ ist kontravariant und ρ ist unitär:

$$\left\langle\, \rho(a)\,\psi \,\middle|\, \psi' \,\right\rangle = \left\langle\, \psi \,\middle|\, \rho(a^\dagger)\,\psi' \,\right\rangle$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Unitarität

Definiere positiv definite Hermitesche Form $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ auf F durch

$$\Big\langle\,(\mathrm{sim})_x\,\Big|\,(\mathrm{sim})_y\,\Big\rangle \overset{\text{def}}{=} \delta_{xy}\ .$$

Die Form $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ ist kontravariant und ρ ist unitär:

$$\Big\langle\,\rho(a)\,\psi\,\Big|\,\psi'\,\Big\rangle = \Big\langle\,\psi\,\Big|\,\rho(a^\dagger)\,\psi'\,\Big\rangle$$

> Die Darstellung ρ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F ist eine direkte Summe von irreduziblen unitären Darstellungen auf $F^{(m)}$.

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$F^{(m)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} F_k^{(m)}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$F^{(m)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} F_k^{(m)}$$

Wie wirkt ρ also auf $F_k^{(m)}$?

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$F^{(m)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} F_k^{(m)}$$

Wie wirkt ρ also auf $F_k^{(m)}$?

$\rho(E_{ij})$ kann nichts ändern, als ein v_j durch ein v_i zu ersetzen:

$$\rho(E_{ij})\, F_k^{(m)} \subset F_{k+i-j}^{(m)}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$F^{(m)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} F_k^{(m)}$$

Wie wirkt ρ also auf $F_k^{(m)}$?

$\rho(E_{ij})$ kann nichts ändern, als ein v_j durch ein v_i zu ersetzen:

$$\rho(E_{ij})\, F_k^{(m)} \subset F_{k+i-j}^{(m)}$$

Mit $\deg(E_{ij}) \overset{\text{def}}{=} i - j$ und $\mathfrak{g}_j := \mathbb{C}\{g \in \mathfrak{gl}_\infty : \deg g = j\}$ gilt dann also

$$\mathfrak{gl}_\infty = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j \qquad \text{und} \qquad \rho(\mathfrak{g}_j)\, F_k^{(m)} \subset F_{k+j}^{(m)} .$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$\rho(\mathfrak{g}_l)\,\psi_m \;=\; 0 \quad \text{für } \; l < 0$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$\rho(\mathfrak{g}_l)\,\psi_m \;=\; 0 \quad \text{für } \; l < 0$$

Denn: Für $j > m$ ist $\rho(E_{ij})\,\psi_m$ immer Null.

Sei also $j = m - k\,,\; k \in \mathbb{Z}_+\,.$

$$\Rightarrow \;\; \rho\,(E_{i,m-k})\;(v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_{m-k} \wedge \ldots)$$

$$= \; v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_i \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots$$

Ist aber $i < j = m - k,$ dann taucht v_i im Dachprodukt doppelt auf, so dass es verschwindet.

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$\rho(\mathfrak{g}_l)\,\psi_m \;=\; 0 \quad \text{für } \; l < 0$$

Denn: Für $j > m$ ist $\rho(E_{ij})\,\psi_m$ immer Null.

Sei also $j = m - k\,,\; k \in \mathbb{Z}_+\,.$

$\Rightarrow \;\; \rho\,(E_{i,m-k})\;(v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_{m-k} \wedge \ldots)$

$= \; v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_i \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots$

Ist aber $i < j = m - k,$ dann taucht v_i im Dachprodukt doppelt auf, so dass es verschwindet.

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F

$$\rho(\mathfrak{g}_l)\,\psi_m = 0 \quad \text{für } l < 0$$

Denn: Für $j > m$ ist $\rho(E_{ij})\,\psi_m$ immer Null.

Sei also $j = m - k\,,\ k \in \mathbb{Z}_+\,.$

$$\Rightarrow \quad \rho\left(E_{i,m-k}\right)\left(v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_{m-k} \wedge \ldots\right)$$

$$= v_m \wedge \ldots \wedge v_{m-k+1} \wedge v_i \wedge v_{m-k-1} \wedge \ldots$$

Ist aber $i < j = m - k,$ dann taucht v_i im Dachprodukt doppelt auf, so dass es verschwindet.

$$\boldsymbol{F_k^{(m)} = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_n=k \\ j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{Z}_+}} \rho_m\left(\mathfrak{g}_{j_1}\right)\ldots\,\rho_m\left(\mathfrak{g}_{j_n}\right)\,\psi_m}$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Höchstgewichte

Sei $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{gl}_\infty$ die Unteralgebra bestehend aus strikt oberen Dreiecksmatrizen, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{j<0} \mathfrak{g}_j$, dann gilt

$$\rho_m(\mathfrak{n}_+)\,\psi_m = 0 \quad \text{und} \quad \rho_m(E_{ii})\,\psi_m = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } i \leq m \\ 0 & \text{für } i > m \end{array} \right\} \psi_m \overset{\text{def}}{=} \lambda_i\,\psi_m \,.$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Höchstgewichte

Sei $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{gl}_\infty$ die Unteralgebra bestehend aus strikt oberen Dreiecksmatrizen, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{j<0} \mathfrak{g}_j$, dann gilt

$$\rho_m(\mathfrak{n}_+)\,\psi_m = 0 \quad \text{und} \quad \rho_m(E_{ii})\,\psi_m = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } i \le m \\ 0 & \text{für } i > m \end{array} \right\} \psi_m \overset{\text{def}}{=} \lambda_i\,\psi_m\ .$$

Definition: Unter Vorgabe einer Menge $\lambda = \{\lambda_i : i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$, genannt Höchstgewicht, heißt eine Darstellung π_λ von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf einem Raum V_λ irreduzible Höchstgewichtsdarstellung, falls es einen Vektor $v_\lambda \neq 0$ aus V_λ gibt mit

$$\pi_\lambda(\mathfrak{n}_+)\,v_\lambda = 0 \qquad \text{und} \qquad \pi_\lambda(E_{ii})\,v_\lambda = \lambda_i\,v_\lambda\ .$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Höchstgewichte

Anwendung auf vorliegenden Fall:

Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist ρ_m eine besondere irreduzible Höchstgewichtsdarstellung, die Fundamentaldarstellung, von $\mathfrak{gl}_\infty$ mit dem fundamentalen Gewicht

$$\omega_m = \left\{ \lambda_i \,:\, \lambda_i = 1 \text{ für } i \leq m \,; \lambda_i = 0 \text{ für } i > m \right\}.$$

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Höchstgewichte

Anwendung auf vorliegenden Fall:

Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist ρ_m eine besondere irreduzible Höchstgewichtsdarstellung, die Fundamentaldarstellung, von $\mathfrak{gl}_\infty$ mit dem fundamentalen Gewicht

$$\omega_m = \left\{ \lambda_i \; : \; \lambda_i = 1 \text{ für } i \leq m \, ; \lambda_i = 0 \text{ für } i > m \right\} .$$

Seien V_1, V_2 irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen von $\mathfrak{gl}_\infty$ mit Höchstgewicht-Vektoren v_1, v_2, so ist $v_1 \otimes v_2$ Höchstgewicht-Vektor einer irreduziblen Unterdarstellung von $V_1 \otimes V_2$, nämlich der höchsten Komponente. Die Höchstgewichte addieren sich.

Darstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf F: Höchstgewichte

Anwendung auf vorliegenden Fall:

Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist ρ_m eine besondere irreduzible Höchstgewichtsdarstellung, die Fundamentaldarstellung, von $\mathfrak{gl}_\infty$ mit dem fundamentalen Gewicht

$$\omega_m = \left\{ \lambda_i \;:\; \lambda_i = 1 \text{ für } i \leq m\,; \lambda_i = 0 \text{ für } i > m \right\}.$$

Seien V_1, V_2 irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen von $\mathfrak{gl}_\infty$ mit Höchstgewicht-Vektoren v_1, v_2, so ist $v_1 \otimes v_2$ Höchstgewicht-Vektor einer irreduziblen Unterdarstellung von $V_1 \otimes V_2$, nämlich der höchsten Komponente. Die Höchstgewichte addieren sich. Auf diese Weise konstruiert man weitere unitäre irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen.

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

Elemente von $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ sind *endliche* Linearkombinationen von Diagonalmatrizen der Art

$$a_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i E_{i,\, i+k} \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{C}\,.$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

Elemente von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ sind *endliche* Linearkombinationen von Diagonalmatrizen der Art

$$a_k \; = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \, E_{i,\, i+k} \quad \text{mit} \quad \lambda_i \; \in \; \mathbb{C} \, .$$

Lässt sich $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ auch durch ρ auf F darstellen?

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

Elemente von $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ sind *endliche* Linearkombinationen von Diagonalmatrizen der Art

$$a_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i E_{i,\,i+k} \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{C}\,.$$

Lässt sich $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ auch durch ρ auf F darstellen?

$$\begin{aligned}
\rho(a_k)\,\psi_m &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i\,\rho(E_{i,\,i+k})\,\psi_m \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i\, v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots \wedge v_{i+k+1} \wedge v_i \wedge v_{i+k-1} \wedge \ldots \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } m-k < i \le m \text{ und } k \neq 0 \\ \sum_{m < i \le m-k} \lambda_i\,\rho(E_{i,i+k})\,\psi_m & \text{für } m < i \le m-k \text{ und } k \neq 0 \\ \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i\right)\,\psi_m & \text{für } k = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$
\begin{aligned}
\rho(a_k)\,\psi_m &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\,\rho(E_{i,\,i+k})\,\psi_m \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\, v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots \wedge v_{i+k+1} \wedge v_i \wedge v_{i+k-1} \wedge \ldots \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } m-k < i \leq m \text{ und } k \neq 0 \\ \sum_{m<i\leq m-k} \lambda_i\,\rho(E_{i,i+k})\,\psi_m & \text{für } m < i \leq m-k \text{ und } k \neq 0 \\ \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\right)\,\psi_m & \text{für } k = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$
\begin{aligned}
\rho(a_k)\,\psi_m &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\,\rho(E_{i,\,i+k})\,\psi_m \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\, v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots \wedge v_{i+k+1} \wedge v_i \wedge v_{i+k-1} \wedge \ldots \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } m-k < i \le m \text{ und } k \neq 0 \\ \boldsymbol{\sum_{m<i\le m-k} \lambda_i\,\rho(E_{i,i+k})\,\psi_m} & \text{für } m < i \le m-k \text{ und } k \neq 0 \\ \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\right)\,\psi_m & \text{für } k = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

endlich

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\begin{aligned}
\rho(a_k)\,\psi_m &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\,\rho(E_{i,\,i+k})\,\psi_m \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\, v_m \wedge v_{m-1} \wedge \ldots \wedge v_{i+k+1} \wedge v_i \wedge v_{i+k-1} \wedge \ldots \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } m-k < i \le m \text{ und } k \ne 0 \\ \sum_{m<i\le m-k} \lambda_i\,\rho(E_{i,i+k})\,\psi_m & \text{für } m < i \le m-k \text{ und } k \ne 0 \\ \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\right)\psi_m & \text{für } k = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

endlich

kann divergieren, „Anomalie“

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\rho(a_k)\,\psi_m \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } m-k<i\le m \text{ und } k\ne 0 \\ \sum_{m<i\le m-k} \lambda_i\,\rho(E_{i,i+k})\,\psi_m & \text{für } m<i\le m-k \text{ und } k\ne 0 \\ \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\right)\,\psi_m & \text{für } k=0 \end{cases}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\rho(a_k)\,\psi_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m-k < i \le m \text{ und } k \neq 0 \\ \sum_{m<i\le m-k} \lambda_i\, \rho(E_{i,i+k})\,\psi_m & \text{für } m < i \le m-k \text{ und } k \neq 0 \\ \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\right)\psi_m & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Ergänze also ρ_m zu $\widehat{\rho}_m$:

$$\widehat{\rho}_m(E_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \rho_m(E_{ij}) & \text{für } i \neq j \text{ oder } i = j > 0 \\ \rho_m(E_{ij}) - \mathbb{1} & \text{für } i = j \le 0 \end{cases}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\rho(a_k)\,\psi_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m-k < i \le m \text{ und } k \neq 0 \\ \sum_{m<i\le m-k} \lambda_i\, \rho(E_{i,i+k})\,\psi_m & \text{für } m < i \le m-k \text{ und } k \neq 0 \\ \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\right) \psi_m & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Ergänze also ρ_m zu $\widehat{\rho}_m$:

$$\widehat{\rho}_m(E_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \rho_m(E_{ij}) & \text{für } i \neq j \text{ oder } i = j > 0 \\ \rho_m(E_{ij}) - \mathbb{1} & \text{für } i = j \le 0 \end{cases}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\rho(a_k)\,\psi_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m-k < i \leq m \text{ und } k \neq 0 \\ \sum_{m<i\leq m-k} \lambda_i\,\rho(E_{i,i+k})\,\psi_m & \text{für } m < i \leq m-k \text{ und } k \neq 0 \\ \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i\right)\,\psi_m & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Ergänze also ρ_m zu $\widehat{\rho}_m$:

$$\widehat{\rho}_m(E_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \rho_m(E_{ij}) & \text{für } i \neq j \text{ oder } i = j > 0 \\ \rho_m(E_{ij}) - \mathbb{1} & \text{für } i = j \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\rho}_m(a_0)\,\psi_m = \begin{cases} +\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)\,\psi_m & \text{für } m \geq +1 \\ -\left(\sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i\right)\,\psi_m & \text{für } m \leq -1 \\ 0 & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$\rho_m(E_{ij})$ genügt den Vertauschungsregeln

$$\left[E_{ij}\,,\,E_{mn}\right] = \delta_{jm}\,E_{in} - \delta_{ni}\,E_{mj}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$\rho_m(E_{ij})$ genügt den Vertauschungsregeln

$$\left[E_{ij}\,,\,E_{mn}\right] = \delta_{jm}\,E_{in} - \delta_{ni}\,E_{mj}$$

(i) $\left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right] = 0$ für $j \neq k\,,\ l \neq i$

(ii) $\left[E_{ij}\,,\,E_{jl}\right] = E_{il}$ für $l \neq i$

(iii) $\left[E_{ij}\,,\,E_{ki}\right] = -E_{kj}$ für $j \neq k$

(iv) $\left[E_{ij}\,,\,E_{ji}\right] = E_{ii} - E_{jj}$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$\rho_m(E_{ij})$ genügt den Vertauschungsregeln

$$\left[E_{ij}\,,\,E_{mn}\right] = \delta_{jm}\,E_{in} - \delta_{ni}\,E_{mj}$$

$$\begin{array}{rlcll}
\text{(i)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right] & = & 0 & \text{für} \;\; j \neq k\,,\; l \neq i \\
\text{(ii)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{jl}\right] & = & E_{il} & \text{für} \;\; l \neq i \\
\text{(iii)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{ki}\right] & = & -E_{kj} & \text{für} \;\; j \neq k \\
\text{(iv)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{ji}\right] & = & E_{ii} - E_{jj} &
\end{array}$$

$\widehat{\rho}_m(E_{ij})$ genügt jedoch *nicht* (iv), sondern es gilt

$$\left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{ji})\right] = \widehat{\rho}_m(E_{ij}) - \widehat{\rho}_m(E_{ji}) + \alpha(E_{ij}, E_{ji})\,\mathbb{1}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$\rho_m(E_{ij})$ genügt den Vertauschungsregeln

$$\left[E_{ij}\,,\,E_{mn}\right] \;=\; \delta_{jm}\,E_{in} - \delta_{ni}\,E_{mj}$$

$$\begin{array}{rlll}
\text{(i)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right] \;=\; 0 & \text{für} & j \neq k\,,\; l \neq i \\
\text{(ii)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{jl}\right] \;=\; E_{il} & \text{für} & l \neq i \\
\text{(iii)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{ki}\right] \;=\; -E_{kj} & \text{für} & j \neq k \\
\text{(iv)} & \left[E_{ij}\,,\,E_{ji}\right] \;=\; E_{ii} - E_{jj} & &
\end{array}$$

$\widehat{\rho}_m(E_{ij})$ genügt jedoch *nicht* (iv), sondern es gilt

$$\left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{ji})\right] \;=\; \widehat{\rho}_m(E_{ij}) - \widehat{\rho}_m(E_{ji}) + \alpha(E_{ij}, E_{ji})\,\mathbb{1}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{ji})\right] = \widehat{\rho}_m(E_{ij}) - \widehat{\rho}_m(E_{ji}) + \alpha(E_{ij}, E_{ji})\,\mathbb{1}$$

$$\alpha(E_{ij}, E_{ji}) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -\alpha(E_{ji}, E_{ij}) = 1 & \text{für } m = j \text{ und } n = i \text{ und } i \leq 0 \text{ und } j \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{ji})\right] = \widehat{\rho}_m(E_{ij}) - \widehat{\rho}_m(E_{ji}) + \alpha(E_{ij}, E_{ji})\,\mathbb{1}$$

$$\alpha(E_{ij}, E_{ji}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\alpha(E_{ji}, E_{ij}) = 1 & \text{für } m = j \text{ und } n = i \text{ und } i \leq 0 \text{ und } j \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\widehat{\rho}_m$ ist somit eine projektive Darstellung von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$:

$$\widehat{\rho}_m\left(\left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right]\right) = \left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{kl})\right] - \alpha(E_{ij}, E_{kl})$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\left[\widehat{\rho}_m(E_{ij}) \,,\, \widehat{\rho}_m(E_{ji})\right] = \widehat{\rho}_m(E_{ij}) - \widehat{\rho}_m(E_{ji}) + \alpha(E_{ij}, E_{ji})\, \mathbb{1}$$

$$\alpha(E_{ij}, E_{ji}) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -\alpha(E_{ji}, E_{ij}) = 1 & \text{für } m = j \text{ und } n = i \text{ und } i \leq 0 \text{ und } j \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\widehat{\rho}_m$ ist somit eine projektive Darstellung von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$:

$$\widehat{\rho}_m\left(\left[E_{ij} \,,\, E_{kl}\right]\right) = \left[\widehat{\rho}_m(E_{ij}) \,,\, \widehat{\rho}_m(E_{kl})\right] - \alpha(E_{ij}, E_{kl})$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\widehat{\rho}_m\Big(\big[E_{ij}\,,\,E_{kl}\big]\Big) = \big[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{kl})\big] - \alpha(E_{ij}, E_{kl})$$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\widehat{\rho}_m\left(\left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right]\right) = \left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{kl})\right] - \alpha(E_{ij}, E_{kl})$$

Eine zentrale Erweiterung verschafft wieder eine *lineare* Darstellung:

$$\mathfrak{a}_\infty \;:=\; \overline{\mathfrak{a}}_\infty \,\oplus\, \mathbb{C}c$$

mit der Lie-Klammer $[a, b] = ab - ba + \alpha(a, b)c$.

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\widehat{\rho}_m\left(\left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right]\right) = \left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{kl})\right] - \alpha(E_{ij}, E_{kl})$$

Eine zentrale Erweiterung verschafft wieder eine *lineare* Darstellung:

$$\mathfrak{a}_\infty := \overline{\mathfrak{a}}_\infty \oplus \mathbb{C}c$$

mit der Lie-Klammer $[a, b] = ab - ba + \alpha(a, b)c$.

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\widehat{\rho}_m\left(\left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right]\right) = \left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{kl})\right] - \alpha(E_{ij}, E_{kl})$$

Eine zentrale Erweiterung verschafft wieder eine *lineare* Darstellung:

$$\mathfrak{a}_\infty := \bar{\mathfrak{a}}_\infty \oplus \mathbb{C}c$$

mit der Lie-Klammer $[a, b] = ab - ba + \alpha(a, b)c$.

Weiterhin: $\widehat{\rho}_m(c) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}$ und $c^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} c$

Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf F

$$\widehat{\rho}_m\left(\left[E_{ij}\,,\,E_{kl}\right]\right) \;=\; \left[\widehat{\rho}_m(E_{ij})\,,\,\widehat{\rho}_m(E_{kl})\right] - \alpha(E_{ij},E_{kl})$$

Eine zentrale Erweiterung verschafft wieder eine *lineare* Darstellung:

$$\mathfrak{a}_\infty \;:=\; \overline{\mathfrak{a}}_\infty \,\oplus\, \mathbb{C}c$$

mit der Lie-Klammer $[a,b] = ab - ba + \alpha(a,b)c$.

Weiterhin: $\widehat{\rho}_m(c) \overset{\text{def}}{=} 1\!\!1$ und $c^\dagger \overset{\text{def}}{=} c$

$\widehat{\rho}_m$ ist **unitäre** Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$.

Darstellung von $\mathcal{A}$ auf F

Die kommutative Unteralgebra von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ der Shift-Operatoren Λ_k wird unter $\widehat{\rho}_m$ zu

$$\left[\widehat{\rho}_m(\Lambda_n)\,,\,\widehat{\rho}_m(\Lambda_k)\right] \;=\; n\,\delta_{n+k}$$

Darstellung von $\mathcal{A}$ auf F

Die kommutative Unteralgebra von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ der Shift-Operatoren Λ_k wird unter $\widehat{\rho}_m$ zu

$$\left[\widehat{\rho}_m(\Lambda_n)\, , \, \widehat{\rho}_m(\Lambda_k)\right] = n\, \delta_{n+k}$$

Das sind die Vertauschungsrelationen der Oszillator-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\hbar = 1$!

Darstellung von $\mathcal{A}$ auf F

Die kommutative Unteralgebra von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ der Shift-Operatoren Λ_k wird unter $\widehat{\rho}_m$ zu

$$\left[\widehat{\rho}_m(\Lambda_n)\,,\,\widehat{\rho}_m(\Lambda_k)\right] = n\,\delta_{n+k}$$

Das sind die Vertauschungsrelationen der Oszillator-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\hbar = 1$!

Damit ist eine *fermionische* unitäre Darstellung von $\mathcal{A}$ konstruiert.

Darstellung von Vir auf F

$\mathfrak{d}$ lässt sich als Unteralgebra von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ darstellen. Also stellt sich die zentrale Erweiterung von $\mathfrak{d}$, nämlich **Vir**, unter $\widehat{\rho}$ linear in der zentralen Erweiterung von $\overline{\mathfrak{a}}_\infty$ dar, nämlich $\mathfrak{a}_\infty$:

$$\left[\widehat{\rho}(d_i)\,,\,\widehat{\rho}(d_j)\right] = (i-j)\widehat{\rho}(d_{i+j}) + \alpha(d_i, d_j)$$

Darstellung von Vir auf F

$\mathfrak{d}$ lässt sich als Unteralgebra von $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ darstellen. Also stellt sich die zentrale Erweiterung von $\mathfrak{d}$, nämlich **Vir**, unter $\widehat{\rho}$ linear in der zentralen Erweiterung von $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ dar, nämlich $\mathfrak{a}_\infty$:

$$\left[\widehat{\rho}(d_i)\,,\,\widehat{\rho}(d_j)\right] \;=\; (i-j)\,\widehat{\rho}(d_{i+j}) + \alpha(d_i, d_j)$$

Der 2–Kozykel berechnet sich nach Definition zu

$$\begin{aligned} \alpha(d_i, d_j) &= \delta_{i+j}\left(\frac{i^3 - i}{12}\,c_\beta + 2\,i\,h_0\right) \qquad \text{mit} \\ c_\beta &:= -12\,\beta^2 + 12\,\beta - 2 \\ h_m &:= \frac{1}{2}\,(\alpha - m)\,(\alpha + 2\,\beta - 1 - m) \end{aligned}$$

Darstellung von Vir auf F

Somit folgt für die Operatoren

$$L_0 := \widehat{\rho}(d_0) + h_0 \qquad \text{und} \qquad L_i := \widehat{\rho}(d_i) \quad \text{für } i \neq 0 \ :$$

$$\left[L_i\,,\,L_j\right] = (i-j)\,L_{i+j} + \delta_{i+j}\,\frac{i^3-i}{12}\,c_\beta$$

Darstellung von Vir auf F

Somit folgt für die Operatoren

$$L_0 := \widehat{\rho}(d_0) + h_0 \qquad \text{und} \qquad L_i := \widehat{\rho}(d_i) \quad \text{für } i \neq 0 \;:$$

$$\boldsymbol{\left[L_i\,,\,L_j\right] = (i-j)\,L_{i+j} + \delta_{i+j}\,\frac{i^3-i}{12}\,c_\beta}$$

Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c_\beta = -12\beta^2 + 12\beta - 2$

Darstellung von Vir auf F

Somit folgt für die Operatoren

$$L_0 := \widehat{\rho}(d_0) + h_0 \qquad \text{und} \qquad L_i := \widehat{\rho}(d_i) \quad \text{für } i \neq 0 \ :$$

$$\left[\boldsymbol{L_i} \,,\, \boldsymbol{L_j}\right] = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})\, \boldsymbol{L_{i+j}} + \boldsymbol{\delta_{i+j}} \frac{\boldsymbol{i^3 - i}}{\mathbf{12}}\, \boldsymbol{c_\beta}$$

Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c_\beta = -12\beta^2 + 12\beta - 2$

Außerdem folgt

$$L_0\, \psi_m = h_m\, \psi_m \qquad \text{und} \qquad L_i\, \psi_m = 0 \quad \text{für } i > 0 \,.$$

Darstellung von Vir auf F

$$\left[L_i\,,\,L_j\right] \;=\; (i-j)\,L_{i+j} + \delta_{i+j}\,\frac{i^3-i}{12}\,c_\beta$$

$$L_0\,\psi_m \;=\; h_m\,\psi_m \qquad \text{und} \qquad L_i\,\psi_m \;=\; 0 \quad \text{für } \; i>0\;.$$

Darstellung von Vir auf F

$$\left[L_i\,,\,L_j\right] \;=\; (i-j)\,L_{i+j} + \delta_{i+j}\,\frac{i^3-i}{12}\,c_\beta$$

$$L_0\,\psi_m \;=\; h_m\,\psi_m \qquad \text{und} \qquad L_i\,\psi_m \;=\; 0 \quad \text{für } \; i>0\;.$$

$\{L_i;\, c_\beta\}$ ist Darstellung der Virasoro-Algebra auf $F^{(m)}$ mit minimalem Eigenwert h_m des Energieoperators L_0; sie ist allerdings nicht notwendig unitär.

Zusammenfassung

- Dirac-Theorie ist zu mehr gut als gedacht!

Zusammenfassung

- Dirac-Theorie ist zu mehr gut als gedacht!
- ρ_m ist lineare, irreduzible, unitäre Höchstgewichtsdarstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf $F^{(m)}$.

Zusammenfassung

- Dirac-Theorie ist zu mehr gut als gedacht!
- ρ_m ist lineare, irreduzible, unitäre Höchstgewichtsdarstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf $F^{(m)}$.
- $\widehat{\rho}_m$ ist lineare, unitäre Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf $F^{(m)}$.

Zusammenfassung

- Dirac-Theorie ist zu mehr gut als gedacht!
- ρ_m ist lineare, irreduzible, unitäre Höchstgewichtsdarstellung von $\mathfrak{gl}_\infty$ auf $F^{(m)}$.
- $\widehat{\rho}_m$ ist lineare, unitäre Darstellung von $\mathfrak{a}_\infty$ auf $F^{(m)}$.
- $\mathfrak{d}$, $\mathbf{Vir}$ und $\mathscr{A}$ sind realisiert als Unterdarstellungen von $\mathfrak{a}_\infty$.