Schleifen- und Kac-Moody Algebren

Steffen Stern

28. Januar 2004

Zusammenfassung

- Definition der Schleifenalgebra $\tilde{gl}_n$
- Darstellung von $\tilde{gl}_n$ auf $\bar{a}_\infty$
- Sukzessive Erweiterung von $\tilde{gl}_n$ auf eine Kac-Moody-Algebra $\hat{gl}_n := \tilde{gl}_n \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.
- Invariante Bilinearformen
- Eine irreduzible Höchstgewichtsdarstellung von $\hat{sl}_n$
- Aussagen über unitäre Darstellungen von $\hat{sl}_n$

Schleifen-Algebra

Erinnere: gl_n ist die Lie-Algebra aller nxn-Matrizen über $\mathbb{C}$

Definiere die Schleifen-Algebra $\tilde{gl}_n := gl_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$: Lie-Algebra der nxn-Matrizen mit Laurent-Polynomen als Einträge.

Bemerke: Für $t \in S^1$, d.h. $t = e^{i\phi}$, ist $\tilde{gl}_n$ gerade die Lie-Algebra der Abbildungen der Einheitssphäre nach gl_n.

Daher: Schleifen-Algebra.

Basis von $\tilde{gl}_n$

Erinnere: e_{ij} mit 1 im (i,j)-ten Eintrag bilden Basis von gl_n.

$\Longrightarrow e_{ij}(k) := t^k e_{ij}$ $(i, j = 1..n, k \in \mathbb{Z})$ bilden Basis von $\tilde{gl}_n$.

Für die Multiplikation gilt:

$$e_{ij}(k)e_{mn}(l) = t^{k+l}e_{ij}e_{mn} = \delta_{jm}e_{in}(k+l)$$

und wir erhalten für den Kommutator:

$$[e_{ij}(k), e_{mn}(l)] = \delta_{jm}e_{in}(k+l) - \delta_{ni}e_{mj}(k+l)$$

Basis von $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^n$

Erinnere: $a \in gl_n$ ist Abbildung $a : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

Analog: $a(t) \in \tilde{gl}_n$ ist Abbildung $a(t) : \mathbb{C}[t, t^{-1}]^n \longrightarrow \mathbb{C}[t, t^{-1}]^n$

Die Vektoren $v_a = v_{nk+j} := t^{-k} e_j$ $(j = 1..n, k \in \mathbb{Z})$ bilden eine mit $a \in \mathbb{Z}$ indizierte Basis von $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^n$

$\Longrightarrow$ Man kann $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^n$ mit $\mathbb{C}^\infty$ identifizieren.

Darstellung von $\tilde{gl}_n$ in $\bar{a}_\infty$

Erinnere: $\bar{a}_\infty := \{(a_{ij}) \mid i,j \in \mathbb{Z}, a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0\}$

Wie wirken die $e_{ij}(k)$ auf die v_{nk+j} ?

$$e_{ij}(k)v_{ns+l} = t^k e_{ij} t^{-s} e_l = t^{k-s}\delta_{jl} e_i = \delta_{jl} v_{n(s-k)+i}$$

Damit Darstellung der Basisvektoren in $\bar{a}_\infty$ (siehe nächste Seite):

$$\tau(e_{ij}(k)) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} E_{n(s-k)+i,ns+j}$$

dabei ist E_{kl} die Matrix mit einer 1 im (k,l)-ten Eintrag.

Darstellung von $\tilde{gl}_n$ in $\bar{a}_\infty$

Warum hat $e_{ij}(k)$ die Darstellung

$$\tau(e_{ij}(k)) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} E_{n(s-k)+i,ns+j} \quad ?$$

Es gilt: $\tau(e_{ij}(k))$ erfüllt $\tau(e_{ij}(k))v_{nl+m} = \delta_{mj}v_{n(l-k)+i}$:

$$\tau(e_{ij}(k))v_{nl+m} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} E_{n(s-k)+i,ns+j} \;\; v_{nl+m} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \delta_{ns+j,nl+m} \;\; v_{n(s-k)+i} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \delta_{sl}\delta_{jm}v_{n(s-k)+i} = \delta_{mj}v_{n(l-k)+i}$$

Darstellung von $\tilde{gl}_n$ in $\bar{a}_\infty$

Für ein allgemeines $a(t) = \sum_k t^k a_k \quad a_k \in gl_n$:

$$\tau(a(t)) = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & a_{-1} & a_0 & a_1 & . & . \\ . & . & a_{-1} & a_0 & a_1 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Eigenschaften der Abbildung τ

- τ ist injektiver Homomorphismus von Lie-Algebren
- $\tau(a(t))$ ist strikte obere Diagonalmatrix $\Leftrightarrow a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...$ und a_0 strikte obere Diagonalmatrix
- Für den Shift-Operator gilt: $\Lambda_j = \tau((a + tb)^j)$ mit $a = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1},\ b = e_{n,1}$
- Definiere die antilineare anti-Involution ω über $\omega(t^k X) = t^{-k} X^+, \quad X \in gl_n$. Dann gilt: $\tau(\omega(t^k X)) = (\tau(t^k X))^+$

Eine affine Kac-Moody-Algebra

Definiere $\hat{gl}_n' := \tilde{gl}_n \bigoplus \mathbb{C}c$.

Mit der Kommutator-Relation:

$[a(t), c] = 0,$
$[a(t), b(t)] = a(t)b(t) - b(t)a(t) + Res_0(tr(a'(t)b(t)))c$

bezeichnet man $\hat{gl}_n'$ als eine affine Kac-Moody-Algebra.

Dabei ist Res_0 das Residuum an $t = 0$, d.h. der Vorfaktor von $1/t$.

Eine affine Kac-Moody-Algebra

Motivation für den Term $Res_0(tr(a'(t)b(t)))c$:

In Vortrag 4 haben wir für $a_\infty := \bar{a}_\infty \bigoplus \mathbb{C}c$ gefunden:

$[a, b] = ab - ba + \alpha(a, b)c$

mit $\alpha(E_{ij}, E_{ji}) = 1$ für $i \leq 0, j \geq 1$, $\alpha = 0$ sonst.

Diese Regel anwendend finden wir hier:

$\alpha(\tau(a(t)), \tau(b(t))) = Res_0(tr(a'(t)b(t)))$.

Invariante Bilinearformen

Eine Bilinearform $(\cdot,\cdot)$ auf einer Lie-Algebra g mit Kommutator $[\cdot,\cdot]$ heißt **invariant**, falls:

$([x,y],z) = (x,[y,z]) \ \ \forall x,y,z \in g$

Beispiel: Auf gl_n definiert $(X,Y) := tr(XY)$ eine invariante Bilinearform, denn:

$([X,Y],Z) = tr(XYZ - YXZ) = tr(XYZ - XZY) = (X,[Y,Z])$.

Invariante Bilinearform auf $\tilde{gl}_n$

Wir übertragen dies auf $\tilde{gl}_n$:

Definiere $(t^k X, t^m Y) := \delta_{k,-m} tr(XY)$

Das verallgemeinert sich auf allgemeine $a(t), b(t) \in \tilde{gl}_n$ zu:

$(a(t), b(t)) = Res_0(t^{-1} tr(a(t)b(t)))$

Diese Form ist invariant, denn es gilt:

$([a(t), b(t)], c(t)) = (ab - ba, c) = Res_0(t^{-1} tr(abc - bac)) =$

$Res_0(t^{-1} tr(abc - acb)) = (a(t), [b(t), c(t)])$

Eine weitere affine Kac-Moody-Algebra

Wir erweitern $\hat{gl}_n'$ zu $\hat{gl}_n := \hat{gl}_n' \bigoplus \mathbb{C}d$ mit den zusätzlichen Kommutator-Relationen:

$[d, c] = 0, \;\; [d, a(t)] = ta'(t)$

Eine solche Algebra nennt man ebenso affine Kac-Moody-Algebra.

Invariante Bilinearform auf $\hat{gl}_n$

Satz: $\hat{gl}_n$ besitzt eine nichtdegenerierte, symmetrische und invariante Bilinearform definiert über:

$(a(t), b(t)) = Res_0(t^{-1}tr(a(t)b(t))$ für $a(t), b(t) \in \tilde{gl}_n$

$(c, a(t)) = 0$
$(d, a(t)) = 0$
$(c, c) = 0$
$(d, d) = 0$
$(c, d) = 1$

$\hat{sl}_n$ als Subalgebra von $\hat{gl}_n$

sl_n ist als Lie-Algebra der spurlosen komplexen nxn-Matrizen eine Unteralgebra von gl_n.
Sie besitzt die Dreieckszerlegung $sl_n = n_- \bigoplus h \bigoplus n_+$, wobei n_- nur strikte untere und n_+ nur strikte obere Dreiecksmatrizen beinhaltet.

Wir definieren die Cartan-Subalgebra
$\hat{h} := span(h_i := e_{ii} - e_{i+1,i+1} \ \ (i = 1..n-1);\ c\ ; d)$

sowie $\hat{n}_+ := n_+ + \sum\limits_{k>0} t^k sl_n$ $\qquad$ $\hat{n}_- := n_- + \sum\limits_{k>0} t^{-k} sl_n$

Damit erhalten wir die Dreieckszerlegung $\hat{sl}_n := \hat{n}_+ \bigoplus \hat{h} \bigoplus \hat{n}_-$.

Bemerke: $\tau(\hat{n}_+)$ ist obere Dreiecksmatrix, daher "Dreieckszerlegung".

Höchstgewichtsdarstellung von $\hat{sl}_n$

Für ein gegebenes $\lambda \in \hat{h}^*$ wird eine irreduzible Darstellung π_λ von $\hat{sl}_n$ auf einem Vektorraum $L(\lambda)$ **Höchstgewichtsdarstellung** genannt, falls ein Vektor v_λ existiert mit:

- $\pi_\lambda(\hat{n}_+)v_\lambda = 0$
- $\pi_\lambda(h)v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad$ für $h \in \hat{h}$

Dabei wird λ als **Höchstgewicht** und v_λ als **Höchstgewichtsvektor** bezeichnet.

Anmerkung: Man kann Existenz und Eindeutigkeit von $L(\lambda)$ zu gegebenem $\lambda \in \hat{h}^*$ zeigen.

Eine irreduzible Darstellung von $\hat{gl}_n$ in $F^{(m)}$

Wir kehren zunächst zu $\hat{gl}_n'$ zurück:

Bereits bekannt:

- $\hat{gl}_n'$ ist eine Unteralgebra von a_∞, welche die Oszillator-Algebra $\mathcal{A}$ enthält. Grund: Die Shift-Operatoren Λ_k spannen die Subalgebra $\mathcal{A}$ von $\bar{a}_\infty$ auf. (Vortrag 4); Alle Shift-Operatoren sind im Bild von τ.

- a_∞ besitzt irreduzible Darstellungen $\hat{r}_m$ in $F^{(m)}$, welche irreduzibel bleiben, wenn man sich auf $\mathcal{A}$ beschränkt.

Eine irreduzible Darstellung von $\hat{gl}_n$ in $F^{(m)}$

Also besitzt $\hat{gl}_n'$ irreduzible Darstellungen $\hat{\pi}_m$ in $F^{(m)}$ definiert über

$\hat{\pi}_m(a(t)) := \hat{r}_m(\tau(a(t)))$

mit der zusätzlichen Definition $\hat{\pi}_m(c) := 1$.

Mit der weiteren Forderung nach $\hat{\pi}_m(d)\Psi_m = 0$ läßt sich dies auf $\hat{gl}_n$ übertragen (Mehr dazu im nächsten Vortrag).

Ψ_m: Vakuum-Vektor.

Wie sieht diese Abbildung in $\hat{sl}_n$ aus?

Erinnere: $\hat{sl}_n = \hat{n}_+ \bigoplus \hat{h} \bigoplus \hat{n}_-$ mit

$\hat{h} = span(h_i := e_{ii} - e_{i+1,i+1} \;\; (i = 1..n-1);\; c\,; d)$.

Wähle neue Basis:

$\{h_0 := c + e_{n,n} - e_{1,1};\;\; h_i\; (i = 1..n-1);\quad d\}$.

Definiere die linearen Funktionale $\omega_j \;\; (j = 0..n-1)$ auf $\hat{h}$ über:

$\omega_j(h_i) := \delta_{ij}\; (i, j = 0..n-1) \quad \omega_j(d) := 0$.

Wie sieht diese Abbildung in $\hat{sl}_n$ aus?

Nach längerem Nachdenken findet man:

$\hat{\pi}_m(h)\Psi_m = \omega_{m'}(h)\Psi_m \quad h \in \hat{h}$.

Dabei ist $m' = m \; mod \; n$.

Höchstgewichtsdarstellung für $\hat{sl}_n$

Erinnere: Für ein gegebenes $\lambda \in \hat{h}^*$ wird eine irreduzible Darstellung π_λ von $\hat{sl}_n$ auf einem Vektorraum $L(\lambda)$ **Höchstgewichtsdarstellung** genannt, falls ein Vektor v_λ existiert mit:

- $\pi_\lambda(\hat{n}_+)v_\lambda = 0$
- $\pi_\lambda(h)v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad$ für $h \in \hat{h}$

Wähle $L(\lambda) := F^{(m)}$, $\pi_\lambda := \hat{\pi}_m$, $v_\lambda := \Psi_m$ und $\lambda := \omega_{m'} \in \hat{h}^*$.

Höchstgewichtsdarstellung für $\hat{sl}_n$

Nun gilt $\tau(\hat{n}_+)$ ist obere Dreiecksmatrix, und $r_m(n_+)\Psi_m = 0$.

Weiterhin ist $\pi_\lambda(h)v_\lambda = \hat{\pi}_m(h)\Psi_m = \omega_{m'}(h)\Psi_m = \lambda(h)v_\lambda$.

Es ist also nur noch zu zeigen: Die Darstellung auf $F^{(m)}$ ist eingeschränkt auf $\hat{sl}_n$ weiterhin irreduzibel.

Finde irrduzible Darstellung von $\hat{sl}_n$

Es würde reichen, wenn wir zeigen könnten: $\mathcal{A} \subset \hat{sl}_n$.

Erinnere: $\Lambda_j = \tau(a^j)$ mit $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ t & 0 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$.

Problem: Alle a^j sind spurfrei bis auf $a^{sn} = t^s id, \ \ s \in \mathbb{N}$.

Daher: Schränke Vektorraum $F^{(m)}$ ein auf:

$F^{(m)}_{(0)} := \{v \in F^{(m)} : \ \hat{r}_m(\Lambda_{sn})v = 0, \quad s \in \mathbb{N}\}$.

Eine irrduzible Darstellung von $\hat{sl}_n$

Erinnere: Ein allgemeines $v \in F^{(m)}$ hat die Form:

$v = \hat{r}_m(\Lambda_{-j_1})\hat{r}_m(\Lambda_{-j_2})...\hat{r}_m(\Lambda_{-j_n})\Psi_m$

Damit $\hat{r}_m(\Lambda_{sn})v \neq 0$ muß mit

$[\hat{r}_m(\Lambda_n), \hat{r}_m(\Lambda_k)] = n\delta_{n,-k}$

gelten: $j_i = sn$ für ein i

(ansonsten schiebe $\hat{r}_m(\Lambda_{sn})$ einfach nach hinten durch; $\hat{r}_m(\Lambda_{sn})\Psi_m = 0$.

Eine irrduzible Darstellung von $\hat{sl}_n$

Also wird $F_{(0)}^{(m)}$ durch alle

$\hat{r}_m(\Lambda_{-j_1})\hat{r}_m(\Lambda_{-j_2})...\hat{r}_m(\Lambda_{-j_n})\Psi_m, \quad (0 < j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_n)$ mit $j_i \neq sn$ aufgespannt.

Diese sind alle linear unabhängig (Vortrag 2 / 5).

Weiterhin ist $F_{(0)}^{(m)}$ unter der Anwendung von $r_m(\hat{sl}_n)$ geschlossen;

Auch gibt es keinen Unterraum, der unter der gesamten Aktion von $\hat{sl}_n$ invariant ist (da alle o.g. Vektoren lin. unabhängig).

Eine irrduzible Darstellung von $\hat{sl}_n$

Also: In $F_{(0)}^{(m)}$ ist die Darstellung $\hat{\pi}_m = \hat{r}_m \circ \tau$ irreduzibel.

Zusammenfassung:

Wir haben eine irreduzible Höchstgewichtsdarstellung von $s\hat{l}_n$ gefunden mit:

$L(\lambda) := F_{(0)}^{(m)}$, $\pi_\lambda := \hat{\pi}_m$, $v_\lambda := \Psi_m$ und $\lambda := \omega_{m'}$.

Bemerke: Mit τ und $\hat{r}_m$ ist auch π_λ unitär.

Erweiterung auf größere Räume

Mithilfe des Tensorproduktes können wir den Darstellungsraum vergrößern, z.B. zu:

$$L(\omega_0) \bigotimes L(\omega_0) \bigotimes L(\omega_1)$$

mit der Darstellung $\pi_{\omega_0} \otimes id \otimes id + id \otimes \pi_{\omega_0} \otimes id + id \otimes id \otimes \pi_{\omega_1}$.

Das Höchstgewicht der höchsten Komponente dieser Darstellung entspricht der Summe der einzelnen Höchstgewichte, d.h. mit der Eindeutigkeit von $L(\lambda)$ gilt insbesondere:

$$L(2\omega_0 + \omega_1) \subset L(\omega_0) \bigotimes L(\omega_0) \bigotimes L(\omega_1)$$

Erweiterung auf größere Räume

Da sich die Unitarität auf die Produktraumdarstellung überträgt, ist folgender Satz bewiesen:

Die Darstellungen $L(k_0\omega_0 + k_1\omega_1 + ... + k_{n-1}\omega_{n-1})$ von $\hat{sl}_n$ mit $k_i \in \mathbb{N}$ sind unitär.

Es gilt sogar viel allgemeiner das folgende **Theorem**:

Die Darstellungen $L(\lambda)$ sind genau dann unitär, wenn $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}$ für $i = 1..n-1$ und $\lambda(d) \in \mathbb{R}$.

Das Level von $L(\lambda)$

Theorem: Die Darstellungen $L(\lambda)$ sind genau dann unitär, wenn $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}$ für $i = 1..n-1$ und $\lambda(d) \in \mathbb{R}$.

Da $c = h_0 + ... + h_{n-1}$, liefert das Theorem sofort:

$\lambda(c) \in \mathbb{N}$.

Man nennt $\lambda(c)$ das **Level** von $L(\lambda)$.