

LIE-SUPERALGEBREN

Supersymmetrie baut auf dem Konzept von Lie-Superalgebren auf, also auf modulo zwei graduierten Lie-Algebren. Die Lie-Superalgebra \mathfrak{s} besitzt einen bosonischen Anteil $\mathfrak{s}^{(0)} = \mathfrak{g}$. Die bosonischen Generatoren wollen wir B_i nennen, $i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$. Die fermionischen Generatoren hingegen nennen wir der Konvention entsprechend $Q_\alpha \in \mathfrak{s}^{(1)}$, $\alpha = 1, \dots, \dim \mathfrak{s}^{(1)}$. Die gesamte Lie-Superalgebra ist dann durch die Strukturkonstanten bestimmt, nämlich

$$[B_i, B_j] = i c_{ij}^k B_k, \quad [Q_\alpha, B_i] = s_{\alpha i}^\beta Q_\beta, \quad [Q_\alpha, Q_\beta] = \gamma_{\alpha\beta}^i B_i.$$

Die Strukturkonstanten sind natürlich nicht völlig beliebig. So haben wir die Symmetrie $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$ und $\gamma_{\alpha\beta}^i = \gamma_{\beta\alpha}^i$. Ferner müssen die graduierten Jacobi-Identitäten erfüllt sein. Diese Forderung ist äquivalent dazu, dass die Strukturkonstanten die adjungierte Darstellung der Algebra formen. Die entsprechenden Darstellungsmatrizen sind

$$\rho(B_i) = \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix}, \quad \rho(Q_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixelemente sind dabei definiert als $(C_i)_j^k = i c_{ij}^k$, $(S_i)_\alpha^\beta = s_{\alpha i}^\beta$, $(\Gamma_\alpha)_\beta^i = \gamma_{\alpha\beta}^i$ und $(\Sigma_\alpha)_i^\beta = s_{i\alpha}^\beta$.

ÜBUNG. Machen Sie sich klar, dass die Forderung, dass die Strukturkonstanten die adjungierte Darstellung formen, äquivalent zu den folgenden vier Forderungen ist:

- (1) Die Matrizen C_i formen die adjungierte Darstellung von \mathfrak{g} .
- (2) Die Matrizen S_i formen ebenfalls eine Darstellung von \mathfrak{g} . Bemerkung: Diese Darstellung ist nicht notwendigerweise irreduzibel.
- (3) Die Konstanten $\gamma_{\alpha\beta}^i$ sind numerische invarianten (transformieren also wie invariante Tensoren) von \mathfrak{g} , also

$$(S_i)_\alpha^\delta \gamma_{\delta\beta}^j + (S_i)_\beta^\delta \gamma_{\alpha\delta}^j - \gamma_{\alpha\beta}^k (C_i)_k^j = 0.$$

- (4) Die γ und die s erfüllen die zyklische Identität

$$\gamma_{\alpha\beta}^i s_{\gamma i}^\delta + \gamma_{\beta\gamma}^i s_{\alpha i}^\delta + \gamma_{\gamma\alpha}^i s_{\beta i}^\delta = 0.$$

Coleman-Mandula. Die Analyse von Coleman und Mandula legt die Eigenschaften bosonischer Symmetrie-Generatoren fest. Sie ist unabhängig davon, ob auch fermionische Generatoren existieren oder nicht. Eine Annahme, nämlich dass es genau einen masselosen Grundzustand gibt, und dass der Ein-Teilchen-Zustand niedrigster Energie ein endliches Energie-Gap zum Vakuum besitzt, kann abgeschwächt werden. Insbesondere vergrößert sich die Symmetriegruppe von der Poincaré-Gruppe zur konformen Gruppe, wenn alle Ein-Teilchen-Zustände masselos sind. Die Eindeutigkeit des Vakuums eliminiert lediglich Theorien mit spontan gebrochener Symmetrie. Das Resultat von Coleman und Mandula ist, dass jede relativistische Feldtheorie, die über eine analytische S -Matrix definiert werden kann, als (bosonische!) Symmetriegruppe nur das direkte Produkt der Poincaré-Gruppe mit einer internen Symmetrie-Gruppe besitzen kann. Die interne Symmetriegruppe ist also nicht eine erweiterte Symmetrie unter Transformationen der Raum-Zeit-Koordinaten. Ferner muss diese interne Symmetrie-Gruppe das direkte Produkt einer halbeinfachen kompakten Lie-Gruppe mit $U(1)$ Faktoren sein.

Die bosonischen Generatoren sind daher die vier Impulse P_μ , die sechs Lorentz-Generatoren $M_{\mu\nu}$ sowie eine Anzahl hermitescher Generatoren B_r der internen Symmetrie. Die Algebra ist demnach

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho), \quad [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}),$$

zusammen mit der internen Symmetrie

$$[B_r, B_s] = i c_{rs}^t B_t \quad [B_r, P_\mu] = 0 \quad [B_r, M_{\mu\nu}] = 0.$$

Die B -Generatoren sind also translationsinvariante Lorentz-Skalare. Die Casimir-Operatoren der Poincaré-Algebra sind das Masse-Quadrat $(P)^2 = P_\mu P^\mu$ sowie der verallgemeinerte Spin-Operator $(W)^2 = W_\mu W^\mu$, wobei W^μ der sogenannte Pauli-Lubanski-Vektor ist, $W^\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$.

ÜBUNG. Zeigen Sie, dass im Ruhesystem eines massiven Zustandes gilt: $(W)^2 = -m^2 \mathbf{L}^2$, wobei der Drehimpulsoperator durch $\mathbf{L} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$ gegeben ist.

Coleman-Mandula (2). Die Casimir-Operatoren kommutieren per definitionem mit der Poincaré-Algebra, und natürlich auch mit den Generatoren der internen Symmetrie, $[B_r, (P)^2] = [B_r, (W)^2] = 0$. Also müssen alle Zustände eines Multipletts der internen Symmetrie die selbe Masse besitzen (*O’Raifeartaigh’s Theorem*) aber auch den selben Spin! Für masselose Zustände mit diskreter Helizität gilt ein ähnliches Resultat. Da nun $W_\mu = \lambda P_\mu$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}/2$ die Helizität, und weiter die Casimirs mit der internen Symmetrie vertauschen, können die internen Symmetrien die Helizität von Zuständen nicht ändern. Dies ist die Aussage des Coleman-Mandula-Theorems.

Das Theorem folgt, wie in der Vorlesung angedeutet, aus der Analytizität der S -Matrix. Gäbe es neben Energie, Impuls und Drehimpuls weitere Raum-Zeit-Symmetrien in einer relativistisch kovarianten Theorie, so wären die elastischen Streuamplituden überbestimmt, und nur noch diskrete Streuwinkel wären möglich – genau das, was wir in einem konkreten Beispiel nachgerechnet haben. Positiv ausgedrückt: Supersymmetrische Generatoren (also solche, die den Spin bzw. die Helizität ändern können) müssen immer fermionisch sein, ändern also den Spin um einen Wert $\Delta\sigma \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ und damit die Statistik des Zustandes.

Fermionische Generatoren. Wir müssen nun die ungeraden Elemente der graduierten Algebra betrachten. Die Jacobi-Identität verknüpft deren Eigenschaften mit denen der bosonischen Generatoren. Daher ergibt das Coleman-Mandula-Theorem auch an die fermionischen Generatoren starke Einschränkungen (*Haag-Łopuszański-Sohnius Theorem*). Der Kern all solcher Einschränkungen folgt aus der einfachen Tatsache, dass der Antikommutator zweier fermionischer Generatoren entweder verschwindet, oder ein bosonisches Element aus dem geraden Teil der Superalgebra ergeben muss. Betrachtet man insbesondere den Antikommutator eines fermionischen Generators Q und seines hermitisch konjugierten, $\{Q, Q^\dagger\}$, so ist das Resultat entweder ein hermitescher und symmetrischer bosonischer Operator (mit Eigenwerten strikt größer null), oder das Resultat ist identisch null. Im letzteren Falle ist dann aber auch schon $Q = 0$.

Darstellungen der Lorentz-Gruppe. Die Lorentz-Gruppe wird durch die sechs hermiteschen Operatoren $M_{\mu\nu}$ erzeugt. Um die Darstellungen der Lorentz-Gruppe effektiv klassifizieren zu können, ist es jedoch hilfreich, eine andere Basis zu wählen, nämlich die sechs nicht hermiteschen Operatoren \mathbf{J}_\pm , definiert als

$$J_\pm^1 = \frac{1}{2}(M^{23} \pm iM^{01}) \quad \text{und zyklische Permutationen.}$$

Diese erfüllen die Vertauschungsrelationen von zwei miteinander kommutierenden $SU(2)$ Algebren,

$$[J_\pm^j, J_\pm^k] = i\varepsilon^{jkl} J_\pm^l, \quad [\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] = 0.$$

Man beachte aber, dass dies *nicht* die Algebra von $SU(2) \times SU(2)$ sein kann, da die Generatoren nicht hermitisch sind, $(\mathbf{J}_\pm)^\dagger = \mathbf{J}_\mp$. Trotzdem können wir diese ‘Fake’- $SU(2)$ -Generatoren verwenden, um die endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen durch zwei Zahlen $(j_+, j_-) \in (\mathbb{Z}_+/2)^2$ zu charakterisieren, die sich aus den Eigenwerten $j_\pm(j_\pm + 1)$ der zwei Casimir-Operatoren $(\mathbf{J}_\pm)^2$ ergeben.

Umgekehrt gilt nun, dass, wenn eine Darstellung der J Generatoren durch endlich-dimensionale hermitesche Matrizen möglich ist, dies nicht simultan für die $M_{\mu\nu}$ funktioniert. Für die Darstellung $(\frac{1}{2}, 0)$ zum Beispiel hat man

$$\rho(\mathbf{J}_+) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \rho(\mathbf{J}_-) = 0, \quad \text{aber} \quad \rho(M^{0k}) = \frac{1}{2}\sigma^{0k} = -\frac{1}{2}i\sigma^k, \quad \rho(M^{12}) = \frac{1}{2}\sigma^{12} = \frac{1}{2}\sigma^3 \quad \text{und zyklisch.}$$

Die Gruppe, die durch diese Generatoren erzeugt wird, ist $SL(2, \mathbb{C})$. Für die Darstellung $(0, \frac{1}{2})$ finden wir analog

$$\rho(\mathbf{J}_+) = 0, \quad \rho(\mathbf{J}_-) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \text{aber} \quad \rho(M^{0k}) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{0k} = \frac{1}{2}i\sigma^k, \quad \rho(M^{12}) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{12} = \frac{1}{2}\sigma^3 \quad \text{und zyklisch.}$$

In beiden Fällen sind die Generatoren \mathbf{L} der eigentlichen Drehungen durch die Pauli-Matrizen $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ gegeben. Aufgrund der Beziehung $\bar{\sigma}^{\mu\nu} = (\sigma^{\mu\nu})^\dagger$ macht es Sinn, die Matrixelemente dieser Matrizen mit zwei unterschiedliche Index-Typen anzugeben, $(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta$ und $(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$. Da es natürlich nur drei, und nicht sechs, linear unabhängige spurlose 2×2 Matrizen gibt, gibt es noch Beziehungen unter diesen Matrizen, die sogenannten Selbst-Dualitäten $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\sigma^{\kappa\lambda}$ bzw. $\bar{\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\bar{\sigma}^{\kappa\lambda}$.

Fermionische Generatoren (2). Die fermionischen Generatoren müssen eine Darstellung der bosonischen Algebra tragen. Die Darstellungen der Lorentz-Gruppe können durch zwei Spins charakterisiert werden als (j, j') . Sei nun Q in so einer Darstellung (j, j') , dann wird $\{Q, Q^\dagger\}$ einen Anteil in der Darstellung $(j + j', j + j')$ enthalten. Nun ist P_μ das einzige Element der Poincaré-Algebra, das in so einer Darstellung liegt, nämlich in der Darstellung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Daher müssen die fermionischen Generatoren alle in den zwei-dimensionalen Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0)$ oder $(0, \frac{1}{2})$ der Lorentz-Algebra liegen. Damit ergibt sich

$$[Q_{i\alpha}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_{i\beta} \quad [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}^i_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}.$$

Hierbei ist wieder $\sigma^{0k} = -i\sigma^k$ sowie $\sigma^{12} = \sigma^3$ plus zyklische Permutationen davon. Der Index i nummeriert die verschiedenen 2-Spinoren Q_α , $i = 1, \dots, N$. Wenn Q ein susy Generator ist, so ist es auch Q^\dagger . Da $(Q_{i\alpha})^\dagger$ in der komplex konjugierten Darstellung liegen muss, können wir die \bar{Q} Generatoren gerade so nummerieren, dass immer $\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}} = (Q_{i\alpha})^\dagger$ ist. Der Antikommutator $\{Q, \bar{Q}\}$ transformiert als $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ so dass wir finden:

$$\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\} = 2\delta_i^j (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu.$$

ÜBUNG. Zeigen Sie, dass das Kronecker-Symbol immer durch eine geeignete Basiswahl in der fermionischen Algebra erzielt werden kann. Bemerkung: Die Wahl des Vorzeichens für das Resultat des Antikommutators folgt aus der Forderung, dass die Energie $E = P_0$ ein positiv definiten Operator sein soll.

Lösung: Nehmen wir an, wir hätten allgemeiner $\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\} = 2c_i^j (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu$ mit irgendwelchen Koeffizienten c_i^j . Da die Matrizen σ^μ hermitesch sind, folgt, dass die Matrix C mit Matrixelemente c_i^j ebenfalls hermitesch sein muss (indem man zum Beispiel das Konjugierte der Relation betrachtet, was $c_i^j = (c_j^i)^*$ impliziert). Wir können also die Matrix C mit Hilfe einer unitären Matrix U diagonalisieren. Definieren wir unsere Basis entsprechend um, $Q_{i\alpha} \mapsto U_i^j Q_{j\alpha}$ und $\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}} \mapsto \bar{Q}^j_{\dot{\alpha}} (U^{-1})_j^i$, so sind wir schon fast am Ziel. Ist die Energie positiv definit (siehe weiter unten), so sind alle Eigenwerte c_i der Matrix C ebenfalls positiv, und wir können die Generatoren noch reskalieren: $Q_{i\alpha} \mapsto \sqrt{c_i} Q_{i\alpha}$ und $\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}} \mapsto \sqrt{c_i} \bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}$, wobei *nicht* über i summiert wird. Die Umdefinition der Q Generatoren kann also so gemacht werden, dass die Realitätsbedingung $\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}} = (Q_{i\alpha})^\dagger$ sich nicht ändert. Bei dieser Herleitung machten wir die Annahme, dass die σ^μ hermitesch sind. Genauer gilt, dass die Strukturkonstanten des Antikommutators nach Bedingung (3) von oben numerisch invariante Tensoren der Lorentz-Gruppe sind. Es folgt daraus mit einiger Rechenarbeit, dass die σ^μ in der Tat proportional zu den Pauli Spin-Matrizen sein müssen (mit $\sigma^0 = \mathbb{1}$). Das Vorzeichen des Resultates für den Antikommutator wird dadurch fixiert, dass die Energie $E = P_0$ ein positiv definiten Operator sein soll, denn:

ÜBUNG. Zeigen Sie, dass $\sum_{\alpha=1,2} \{Q_{i\alpha}, (Q_{i\alpha})^\dagger\} = 4P_0$ ist (keine Summation über i).

Lösung: Die Summation über α entspricht der Spurbildung, so dass wir $2\text{tr}\sigma^\mu P_\mu$ erhalten. Nur σ^0 hat eine nicht-verschwindende Spur, so dass die Behauptung folgt.

ÜBUNG. Zeigen Sie, dass die susy Generatoren mit den Impulsen kommutieren (translationsinvariant sind), dass also $[Q_{i\alpha}, P_\mu] = [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0$ ist.

Lösung: Der Kommutator von einem Q mit einem P_μ kann die Lorentz-Darstellungen $(1, \frac{1}{2})$ und $(0, \frac{1}{2})$ enthalten. Da wir aber keine $(1, \frac{1}{2})$ Generatoren haben, ist die allgemeinste Möglichkeit für den Kommutator eine Summe über die \bar{Q} Generatoren,

$$[Q_{i\alpha}, P_\mu] = c_{ij} (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{Q}^{j\dot{\beta}}, \quad \text{bzw.} \quad [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = (c_{ij})^* (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_{j\beta}$$

für den konjugierten Kommutator. Also bekommen wir

$$[[Q_{i\alpha}, P_\mu], P_\nu] = c_{ij} (c_{jk})^* (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu)_\alpha^\beta Q_{k\beta}.$$

Da die Impulse miteinander kommutieren, können wir daraus sofort die Jacobi-Identität hinschreiben, so dass für die Matrix C mit Matrixelemente c_{ij} also $CC^* = 0$ gelten muss, da der Faktor mit den σ Matrizen nicht verschwindet. Der allgemeinste Antikommutator von zwei Q Generatoren kann nur die Form

$$\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{(ij)} + \text{Term symmetrisch in } \alpha\beta.$$

Die $Z_{(ij)}$ sind Linearkombinationen der Generatoren der *internen* Symmetriegruppe, und kommutieren daher mit den P_μ . Damit haben wir

$$0 = \varepsilon^{\alpha\beta} [\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\}, P_\mu] = \varepsilon^{\alpha\beta} \{Q_{i\alpha}, [Q_{j\beta}, P_\mu]\} - (i \leftrightarrow j) = \varepsilon^{\alpha\beta} c_{jk} (\sigma_\mu)_{\beta\dot{\gamma}} \{Q_{i\alpha}, \bar{Q}^{k\dot{\gamma}}\} - (i \leftrightarrow j) \propto (c_{ij} - c_{ji}) P_\mu.$$

Da die Matrix C symmetrisch ist, so dass also $CC^\dagger = 0$ gilt, müssen die c_{ij} verschwinden, was zu zeigen war.

Fermionische Generatoren (3). Die Q Generatoren bilden auch eine Darstellung der internen Symmetriegruppe, da $[Q_{i\alpha}, B_r] = (b_r)_i^j Q_{j\alpha}$. Die interne Symmetriegruppe ist kompakt, so dass wir die Darstellungsmatrizen hermitesch wählen können, $b_r = b_r^\dagger$. Es ergibt sich daher für die \bar{Q} Generatoren die konjugierte Darstellung $[\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, B_r] = -\bar{Q}^j_{\dot{\alpha}} (b_r)_j^i$. Die größte interne Symmetrie, die nicht-trivial auf den susy Generatoren agieren kann, ist demnach $U(N)$. Diese Struktur des bosonischen Sektors als direktes Produkt haben wir, in weiser Voraussicht, in der Notation mit zwei Indizes bereits implementiert. Die Indizes $\alpha, \dot{\alpha}$ gehören zur Poincaré-Symmetrie, der Index i jedoch zur internen Symmetrie.

Nachdem wir die Antikommutatoren von Q mit \bar{Q} bereits kennen, müssen wir noch den Antikommutator zweier Q Generatoren bestimmen, der für zwei Q Operatoren folgt dann sofort durch hermitesche Konjugation. Lorentz-Kovarianz bedingt, dass so ein Antikommutator eine Linearkombination bosonischer Operatoren aus den Lorentz-Darstellungen $(1, 0)$ und $(0, 0)$ sein muss. Der einzige $(1, 0)$ Anteil im bosonischen Sektor ist der selbstduale Anteil von $M_{\mu\nu}$. Allerdings würde so ein Term im Antikommutator $\{Q, Q\}$ nicht mit P_μ kommutieren, während hingegen $\{Q, Q\}$ aber mit den Impulsen vertauschen muss. Daher kann der gesuchte Antikommutator nur zentrale Terme ergeben,

$$\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{(ij)}.$$

Wieder sind die $Z_{(ij)}$ Linearkombinationen aus den Generatoren der internen Symmetrie, $Z_{(ij)} = a_{(ij)}^r B_r$. Die Behauptung ist, dass $[Z_{(ij)}, X] = 0$ für sämtliche Elemente X der Lie-Superalgebra, so dass die Z zentrale Ladungen der Supersymmetrie sind. Aus dem, was wir schon über den Kommutator von Q mit B wissen, ergibt sich

$$[Z_{(ij)}, B_r] = (b_r)_i^k Z_{(kj)} + (b_r)_j^k Z_{(ik)} \quad \text{und damit} \quad [Z_{(ij)}, Z_{(kl)}] = a_{(kl)}^r (b_r)_i^k Z_{kj} + a_{(kl)}^r (b_r)_j^k Z_{ik}.$$

Beide Gleichungen zusammen besagen, dass die Z eine invariante Unter algebra der internen Symmetrie-Algebra aufspannen. Mit Hilfe der Jacobi-Identität läßt sich der Kommutator $[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, Z_{(jk)}]$ als eine Summe von Kommutatoren der Form $[Q, P_\mu]$ schreiben, die – wie wir ja schon wissen – alle verschwinden. Dies impliziert $a_{(ij)}^r (b_r)_k^l = 0$, und damit das Verschwinden der Kommutatoren $[Q, Z_{(ij)}] = [Z_{(ij)}, Z_{(kl)}] = 0$. Also ist die invariante Unter algebra abelsch. Da die interne Symmetriegruppe ein direktes Produkt eine halb-einfachen Lie-Gruppe mit abelschen $U(1)$ Faktoren sein muss, kann diese invariante Unter algebra nur in diesem abelschen Faktor liegen. Es gilt daher auch $[B_r, Z_{(ij)}] = 0$, so dass die Z also mit allen Generatoren der Lie-Superalgebra kommutieren.

Betrachtet man noch die hermitesch konjugierte Gleichung

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = -2\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z^{(ij)} \quad \text{mit} \quad Z^{(ij)} = (Z_{(ji)})^\dagger,$$

so findet man, dass die $Z^{(ij)}$ natürlich ebenfalls zentrale Ladungen sind. Symmetrie der Antikommutatoren unter gleichzeitigem Austauschen von i mit j und α mit β sowie die Antisymmetrie von $\varepsilon_{\alpha\beta}$ liefert die Antisymmetrie $Z_{(ij)} = -Z_{(ji)}$, oder auch äquivalent dazu $a_{(ij)}^r = -a_{(ji)}^r$. Damit folgt, dass für $N = 1$ keine zentralen Ladungen existieren können! Darüber hinaus muss es für jede nicht-verschwindende zentrale Ladung eine jeweils verschiedene anti-symmetrische $N \times N$ Matrix a^r geben, die ein numerisch invarianter Tensor bezüglich der internen Symmetriegruppe ist,

$$(b^s)_i^k a_{(kj)}^r + (b^s)_j^k a_{(ik)}^r = 0,$$

wie aus Bedingung (3) folgt. Die Existenz zentraler Ladungen erzwingt also ein symplektische Struktur auf dem halb-einfachen Teil der internen Symmetriegruppe. Die größte interne Symmetrie, die mit zentralen Ladungen verträglich ist, ist daher $USp(N)$, die kompakte Verison der symplektischen Gruppe $Sp(N)$.

Die R -Ladung. Wenn es nur eine 2-Spinor Superladung Q_α gibt, d.h. $N = 1$, so besitzt eine solche Theorie einfache oder nicht erweiterte Supersymmetrie. Im Falle $N > 1$ spricht man von erweiterter Supersymmetrie. Wenn $N = 1$, so ist die einzige nicht-trivial agierende internen Symmetrie eine einzige $U(1)$, die von einer Ladung R generiert wird, der sogenannten R -Ladung. Wir haben dann $[Q, R] = Q$, $[\bar{Q}, R] = -\bar{Q}$. Da unter der Paritätsoperation $Q \rightarrow \bar{Q}$ und $\bar{Q} \rightarrow Q$, muss $R \rightarrow -R$ unter der Parität transformieren. Man sagt daher, dass die $U(1)$ Symmetriegruppe chiral ist. Schreibt man die Q Spinoren wieder in 4-Spinoren um, so sieht man sher direkt, dass die R -Symmetrie chiral ist.