LIE-SUPERGRUPPEN

In der Vorlesung wird erläutert, wie man Lie-Supergruppen definieren kann, analog zur Definition von Lie-Gruppen, so dass die Supergruppe durch exponentieren der Lie-Superalgebra erhalten wird. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, die entsprechende Super-Verallgemeinerung der Determinanten einer Matrix zu definieren. Bei der Behandlung der Lie-Superalgebren haben wir bereits die Superspur str kennengelernt. Für eine auf einem graduierten Vektorraum $V(m|n)$ operierende Matrix der Form

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right), \quad A, D \text{ gerade bzw. bosonisch}, \quad B, C \text{ ungerade bzw. fermionisch},$$

war die Superspur definiert als $\mathrm{str}\, M = \mathrm{tr}\, A - \mathrm{tr}\, D$. Die Superspur ist zyklisch, $\mathrm{str}(MN) = \mathrm{str}(NM)$ und additiv, $\mathrm{str}(M + N) = \mathrm{str}\, M + \mathrm{str}\, N$. Wir suchen nun eine entsprechende Definition für die Superdeterminante sdet, so dass $\mathrm{sdet}(MN) = \mathrm{sdet}(m)\,\mathrm{sdet}(N)$ multiplikativ ist. Es liegt nahe, es mit der Definition $\mathrm{sdet}\, M = \exp(\mathrm{str}\, \log M)$ zu versuchen. Für das folgende ist folgende Definition hilfreich: Eine Matrix $M \in \mathrm{End}\, V(m|n)$ besitzt die geraden Anteile $M^{(0,0)} = A$ und $M^{(1,1)} = D$. Dabei ist $M^{(0,0)} \in \mathrm{End}\, V^{(0)}(m|n)$ eine $m \times m$ Matrix, die den bosonischen Anteil des graduierten Vektorraumes in sich abbildet; $M^{(1,1)} \in \mathrm{End}\, V^{(1)}(m|n)$ ist eine $n \times n$ Matrix, die den fermionischen Anteil des graduierten Vektorraumes in sich abbildet. Entsprechend kann man die Anteile $M^{(1,0)} = B \in \mathrm{Hom}(V^{(1)}(m|n), V^{(0)}(m|n))$ und $M^{(0,1)} = C \in \mathrm{Hom}(V^{(0)}(m|n), V^{(1)}(m|n))$ definieren, die $m \times n$ bzw. $n \times m$ Matrizen sind.

ÜBUNG. Zeigen Sie, dass für die oben gegebene Matrix M die Superdeterminante durch die Formel

$$\mathrm{sdet}\, M = \frac{\det A}{\det(D - CA^{-1}B)}$$

gegeben ist. Es ist bemerkenswert, dass $(D - CA^{-1}B)^{-1} = (M^{-1})^{(1,1)}$ gerade der Fermi-Fermi-Anteil des Inversen der Matrix M ist. Zeigen Sie zunächst diese Tatsache, indem Sie $M = ST$ geschickt zerlegen, und folgern Sie dann die Formel für die Superdeterminante, die sich dann zusammen mit der Superspur elegant auch als

$$\begin{aligned} \mathrm{str}\, M &= \mathrm{tr}(M^{(0,0)}) - \mathrm{tr}(M^{(1,1)}), \\ \mathrm{sdet}\, M &= \det(M^{(0,0)})\det((M^{-1})^{(1,1)}). \end{aligned}$$

schreiben läßt. Beweisen Sie schließlich noch, dass die Superdeterminante in der Tat multiplikativ ist.

Lösungs-Skizze: Man zerlegt zunächst $M = ST$ so in das Produkt zweier Matrizen, dass S auf dem fermionischen Sektor die Identität ist, T auf dem bosonischen Sektor. Durch Ausmultiplizieren kann man sich schnell davon überzeugen, dass die folgende Zerlegung funktioniert:

$$M = ST, \quad S = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & 1\!\!1 \end{array}\right), \quad T = \left(\begin{array}{c|c} 1\!\!1 & A^{-1}B \\ \hline 0 & D - CA^{-1}B \end{array}\right).$$

Es ist nützlich, die Abkürzung $\Delta = D - CA^{-1}B$ einzuführen. Die Matrizen S und T sind leicht zu invertieren. Man findet für $M^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ schnell

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}B\Delta^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\Delta^{-1} \\ \hline -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{array}\right), \; S^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline -CA^{-1} & 1\!\!1 \end{array}\right), \; T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1\!\!1 & A^{-1}B\Delta^{-1} \\ \hline 0 & \Delta^{-1} \end{array}\right).$$

Es ist also $M^{(0,0)} = A$ und, wie versprochen, $(M^{-1})^{(1,1)} = \Delta^{-1}$. Wir können nun die Formel $\mathrm{sdet}\, M = \exp(\mathrm{str}\, \log M)$ einsetzen, wobei wir für den Logarithmus der Matrix M die Entwicklung

$$\log M = \log(1\!\!1 + (M - 1\!\!1)) = -\sum_k (M - 1\!\!1)^k \frac{(-1)^k}{k}$$

verwenden. Der Logarithmus ist additiv für Produkte, so dass wir $\exp(\mathrm{str}\, \log(ST)) = \exp(\mathrm{str}(\log S + \log T)) = \exp(\mathrm{str}\, \log S)\exp(\mathrm{str}\, \log T)$ schreiben können. Nun sieht man mit der Entwicklung des Logarithmus, dass dieser für S und T sehr einfach wird:

$$\log S = \left(\begin{array}{c|c} \log A & 0 \\ \hline * & 0 \end{array}\right), \quad \log T = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \log\Delta \end{array}\right),$$

wobei “$*$” für Anteile steht, die wir im folgenden nicht explizit zu kennen brauchen. Also ergibt sich schließlich $\exp(\mathrm{str}\, \log S)\exp(\mathrm{str}\, \log T) = \exp(\mathrm{tr}\, \log A)\exp(-\mathrm{tr}\, \log\Delta) = \det A\, \det\Delta^{-1} = \det A/\det\Delta$.

In der Vorlesung wurde das Konzept des Superraumes eingeführt. Dies ist erforderlich, wenn man das Wirkunsprinzip manifest supersymmetrisch einführen möchte. Auf so einem Raum kann man auf einfache Weise die Operation der Poincaré-Supergruppe einführen. Im Superraum sind die Koordinaten keine reellen Zahlen mehr, sondern Elemente einer Grassmann-Algebra $\{v^i, v^j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots L$. Wie bei den Clifford-Algebren ist die vollständige Grassmann-Algebra B_L frei erzeugt aus allen Worten in den v_i, modulo den Antikommutatoren. Ein Elemente $a \in B_L$ hat daher die Form

$$a = a^{(0)}\mathbb{1} + a^{(1)}_{i_1} v^{i_1} + a^{(2)}_{i_1 i_2} v^{i_1} v^{i_2} + \ldots + a^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} v^{i_1} v^{i_2} \ldots v^{i_k} + \ldots + a^{(L)}_{12\ldots L} v^1 v^2 \ldots v^L \,,$$

wobei die Indizes geordnet sind, $i_j < i_{j+1}$. Die Koeffizienten $a^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sind reelle Zahlen. Wir können wieder zwischen geraden und ungeraden Elementen unterscheiden. Ein Superraum ist ein kartesisches Produkt aus geraden und ungeraden Sektoren einer Grassmann-Algebra, wobei die Anzahl der geraden Sektoren die bosonische Dimension, und die Anzahl der ungeraden Sektoren die fermionische Dimension bestimmt. Zum Beispiel ist $B^{4,4}_L = B^{(0)}_L \times B^{(0)}_L \times B^{(0)}_L \times B^{(0)}_L \times B^{(1)}_L \times B^{(1)}_L \times B^{(1)}_L \times B^{(1)}_L$. Die Koordinaten in diesem Superraum sind gegeben durch vier Elemente x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, aus $B^{(0)}_L$, sowie vier Elemente θ^α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, aus $B^{(1)}_L$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dies tatsächlich einen topologischen Raum ergibt.

Integration über Grassmann-Variablen. Um das Wirkungsprinzip manifest supersymmetrisch zu formulieren, muss man über die Koordinaten eines Superraums integrieren können, die nun eben B_L-wertig sind. Der Einfachheit halber bertrachten wir eine einzige Fermi-Variable $\theta \in B^{(1)}_L$. Es sei $f(\theta)$ eine beliebige B_L-wertige Funktion von θ. Wir wollen das Integral $\int f \,\mathrm{d}\theta$ erklären, und zwar als Analogon zum *definiten* Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x$ für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen gewöhnlicher Koordinaten. Das Integral muss also eine Abbildung von den B_L-wertigen Funktionen in die reellen Zahlen sein, das folgende Eigenschaften erfüllt:
(1) *Linearität*: $\int \sum_i c_i\, f_i(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_i c_i \int f_i(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, wobei die f_i Funktionen von θ sind. Die $c_i \in B_L$ sind von θ unabhängig (sind also Konstanten bezüglich der Integration).
(2) *Translationsinvarianz*: $\int f(\theta + \varepsilon)\,\mathrm{d}\theta = \int f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ für alle $\varepsilon \in B_L$, die von θ unabhänig sind (also Konstanten bezüglich der Integration sind).

ÜBUNG. Geben Sie die allgemeinste Funktion $f(\theta)$ explizit an. Integrieren Sie die Funktion $f(\theta + \varepsilon)$ explizit und leiten Sie daraus die Regeln

$$\int \mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{und} \quad \int \theta\,\mathrm{d}\theta = const \neq 0$$

her. Man definiert für gewöhnlich $\int \theta\,\mathrm{d}\theta = 1$, wobei diese Normierung nützlich, aber ansonsten völlig beliebig ist. Machen Sie sich klar, dass sich dies für mehrere Grassmann-Variablen $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$ verallgemeinert zu

$$\int \mathrm{d}\theta^i = 0 \quad \text{und} \quad \int \theta^i\,\mathrm{d}\theta^j = \delta^{ij}\,.$$

Lösung: Die allgemeinste Funktion einer fermionischen Variable θ kann höchstens linear in θ sein, da $\theta^2 = 0$ ist. Also ist $f(\theta) = a + b\theta$, wobei $a, b \in B_L$ unabhängig von θ sind. Die geforderte Translationsinvarianz des Integrals

$$\int (a + b\theta + b\varepsilon)\mathrm{d}\theta = (a + b\varepsilon)\int \mathrm{d}\theta + b\int \theta\mathrm{d}\theta \ \stackrel{!}{=}\ \int (a + b\theta)\mathrm{d}\theta = a\int \mathrm{d}\theta + b\int \theta\mathrm{d}\theta$$

führt also zu den Bedingungen

$$b\varepsilon \int \mathrm{d}\theta = 0\,, \quad b\int \theta\mathrm{d}\theta \neq 0\,.$$

Die letzte Bedinung ist notwendig, damit die gesuchte Integration nicht völlig trivial ist.

Differenzieren nach Grassmann-Variablen. Da alle Elemente des Superraumes B_L-wertig sind, kommt es auf die genaue Reihenfolge an, in der die Objekte stehen. Dies ist ein Grund dafür, warum in den obigen Formeln für die Integration das $\mathrm{d}\theta$ immer ganz hinten steht, so dass die Linearität nach links (also rausziehen vor das Integral) funktioniert. Ähnlich kann man nun Ableitungen nach Grassmann-Variablen einführen. Diese definieren wir aus ähnlichen Gründen als von rechts wirkend, $f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}$.

ÜBUNG. Finden Sie die Ableitung $f(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}$ für die allgemeinste Funktion $f(\theta)$. In welcher Beziehung stehen also Integration und Differentiation zueinander?

Lösung: Da $f(\theta) = a + b\theta$, ergibt sich für die Ableitung $f(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta} = b$. Überraschenderweise ergibt sich allerdings auch $\int f(\theta)\mathrm{d}\theta = b$. Also erhalten wir das Resultat, dass für fermionische, d.h. Grassmann-, Variablen Integration und Differentiation identisch sind! Man beachte allerdings, dass die Grassmann-Integration allerdings eine Verallgemeinerung der bestimmten Integration bosonischer Variablen darstellt. Es ist ein interessantes Problem, für die Grassmann-Integration eine Definition im Rahmen von (entsprechend verallgemeinerten) Riemannschen Summen zu geben.

Dimensionen. Die Normierung $\int \theta\,\mathrm{d}\theta = 1$ impliziert, dass die Dimensionen von θ und $\mathrm{d}\theta$ gerade invers zueinander sind. Unter eine Supersymmetrie-Transformation gehen (θ, x^μ) in $(\theta + \varepsilon, x^\mu + \mathrm{i}\bar{\theta}\gamma^\mu\varepsilon)$ über. Demnach haben θ und ε die selbe Dimension, und daher muss x^μ das Quadrat dieser Dimension tragen. Es macht Sinn, der bosonischen Superraum-Koordinaten x^μ nach wie vor die Dimension einer Länge zu geben, $[L]$. Da $x^\mu = a^{(0)}1\!\!1 + a^{(2)}_{ij}v^iv^j + \ldots$, ist dies zumindest für den Anteil von x^μ richtig, der von der Form $a^{(0)} \in \mathbb{R}$ ist. Diesen Anteil nennt man den Körper (body) von x^μ. Es folgt damit, dass die fermionischen Koordinaten des Superraumes die Dimension $[L^{1/2}]$ besitzen müssen, und die Differentiale $\mathrm{d}\theta$ die Dimension $[L^{-1/2}]$. Bei Integration erhöht also jede bosonische Koordinate die Dimension des Superraumes um eins, während jedoch die Integration über eine fermionsche Koordinate die Dimension um einhalb verringert! Dies ist einer der Gründe, warum in supersymmetrischen Feldtheorien die Konvergenzeigenschaften von Integralen oft so viel besser sind, als in nicht-supersymmetrischen Feldtheorien. Dies kann soweit gehen, dass susy Theorien sogar endlich werden (also noch besser, also nur vollständig renormierbar).

Grassmannsche Delta-Funktion. Es ist nützlich, eine Grassmann-Version der Delta-Distribution einzuführen, definiert durch ihr Verhalten in einem Integral:

$$\int f(\theta)\delta(\theta)\,\mathrm{d}\theta = f(0)\,.$$

Für mehrere Grassmann-Variablen definiert man (Reihenfolge beachgen!) $\delta^n(\theta) = \delta(\theta^n)\delta(\theta^{n-1})\ldots\delta(\theta^1)$.

ÜBUNG. Finden Sie die δ-Funktion explizit so, dass diese die Eigenschaften $\int \delta(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1$ und $\int \theta\delta(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$ besitzt. Wie sieht $\delta^n(\theta)$ aus?

Lösung: Von den Regeln für die Grassmann-Integration können wir schnell eine explizite Form für $\delta(\theta)$ finden. Einsetzen von $f(\theta) = a + b\theta$ ergibt:

$$\int f(\theta)\delta(\theta)\mathrm{d}\theta = \int (a + b\theta)\mathrm{d}\theta \stackrel{!}{=} f(0) = a\,.$$

Offensichtlich leistet die Wahl $\delta(\theta) = \theta$ gerade das Gewünschte. Damit ist

$$\int \delta(\theta)\mathrm{d}\theta = 1\,, \quad \int \theta\delta(\theta)\mathrm{d}\theta = 0\,,$$

d.h. die Delta-Funktion ist normiert und erfüllt die gleiche Relation wie die gewöhnliche Diracsche δ-Distribution, $x\delta(x) = 0$. Bei der Verallgemeinerung auf mehrere Grassmann-Variablen muss man lediglich bei der Reihenfolge aufpassen. Diese ist zwar letztlich beliebig, muss aber ein-für-alle-mal festgelegt werden, da man sich sonst ggfls. Vorzeichen einhandelt.

Body & Soul. Das Wirkungsprinzip einer supersymmetrischen Theorie sit durch ein Integral über den Superraum gegeben. Da Integration über die fermionischen Variablen so einfach ist, kann der Teil der Integation über die n fermionischen Koordinaten meist vollständig und explizit durchgeführt werden. Es verbleibt ein Integral über die m bosonischen Koordinaten. Diese sind, genau genommen, aber keine reell-wertigen Koordinaten, sondern gerade Elemente der Grassmann-Algebra B_L. Die Integration über solche $B_L^{(0)}$-wertigen Koordinaten ist ebenfalls keine gewöhnliche Riemann-Integration. Am einfachsten läßt sie sich als eine Contour-Integration in $B_L^{(0)}$ definieren, das unabhängig von der Wahl des Integrationsweges ist. Dann ist es natürlich möglich, den Integrationsweg gerade so zu wählen, dass die Integration entlang der reell-wertigen Körper (bodies) der bosonischen Koordinaten verläuft, ohne dass etwas verloren geht. Auf diese Weise erhalten wir eine vollständige Vorschrift zur Berechnung von Superraum-Integralen, die konsistent mit Koordinatenwechseln (zum Beispiel durch Supersymmetrie-Transformationen) ist, die die Seele (soul) der bosonischen Raum-Zeit-Koordinaten verändern. Die Seele von $x^\mu = a^{(0)}1\!\!1 + a^{(2)}_{ij}v^iv^j + \ldots$ ist entsprechend der Anteil $a^{(2)}_{ij}v^iv^j + \ldots$, also alles außer $a^{(0)}$. Im Prinzip ändert sich dabei für uns nicht viel, wir integrieren wie gewohnt. Wir sollten nur immer im Hinterkopf behalten, dass die bosonischen Koordinaten nun mehr sind, als nur reelle Zahlen.