MECHANIK SUPERSYMMETRISCHER PUNKTTEILCHEN

In der Vorlesung haben wir nun alle wichtigen Werkzeuge entwickelt, um nun endlich physikalische Systeme mit Supersymmetrie beschreiben zu können. Am Beispiel der Mechanik von Massepunkten soll das nun deutlich gemacht werden. Dies ist ein sehr einfaches Beispiel im Hinblick darauf, dass wir eigentlich supersymmetrische Feldtheorien formulieren wollen. Die Mechanik von Massepunkten entspricht nämlich einer Feldtheorie in einer Raumzeit mit einer Zeit-Dimension, und null (!) Raum-Dimensionen. Diese Sichtweise erhält man einfach dadurch, dass man die Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^d$ des Teilchens in d Raum-Dimensionen als d Felder der ein-dimensionalen Zeit-Variablen t auffasst. Diese Felder verhalten sich, wie wir sehen werden, ungefähr so wie skalare Felder. Um diese Theorie supersymmetrisch erweitern zu können, müssen wir nur die Erweiterung der ein-dimensionalen Raumzeit zum $(1|1)$ Superraum mit Koordinaten (t,τ) vornehmen. Hier ist $t \in B_L^{(0)}$ und $\tau \in B_L^{(1)}$. Wir betrachten zunächst den nicht-relativistischen Fall.

ÜBUNG. Ein nicht-relativistisches Superpunktteilchen wird durch d skalare Superfelder $X^1(t,\tau), \ldots X^d(t,\tau)$ beschrieben, wobei jedes dieser Superfelder die Entwicklung $X^a(t,\tau) = x^a(t) + \theta^a(t)\tau$ besitzt. Wie gehabt sind $x^a \in B_L^{(0)}$ und $\theta^a \in B_L^{(1)}$. Der Hamilton-Operator sollte nach wie vor der Generator der Zeit-Translationen sein, also $H = \mathrm{i}\partial_t$. Für den Generator der susy Translationen setzen wir an $Q = \mathrm{i}\tau\partial_t - \partial_\tau$. Zeigen Sie, dass die infinitesimale Transformation $(1\!\!1 + \epsilon Q)X^a(t,\tau)$ eine Supertranslation ist. Zeigen Sie, dass die Generatoren H und Q die Superalgebra

$$[Q,Q] = 2Q^2 = -2H\,, \quad [Q,H] = [H,H] = 0$$

erfüllen. Dies ist die Algebra der Links-Supertranslationen und der Zeit-Translationen.

ÜBUNG. Wir können zusätzlich die Rechts-Supertranslationen $D = \mathrm{i}\tau\partial_t + \partial_\tau$ definieren. Was ergibt sich unter $(1\!\!1 + \epsilon D)X^a(t,\tau)$ als infinitesimaler Transformation? Zeigen Sie, dass diese die Algebra

$$[D,D] = 2D^2 = +2H\,, \quad [D,H] = [H,H] = 0\,, \quad [Q,D] = 0$$

erfüllen. Was meinen also die Begriffe Links- und Rechts-Supertranslationen?

Wirkung. Da die Links- und Rechts-Supertranslationen miteinander vertauschen, kann man D zur Konstruktion einer manifest supersymmetrischen Wirkung verwenden. Anstelle der alten Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit, $\dot{x}^a$, tritt nun die supersymmetrische Ableitung D. Ferner müssen wir natürlich nun über den Superraum integrieren. Wir machen den Ansatz

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\tau\,\mathcal{L}\,, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_a (DX^a)(D(DX^a))\,.$$

Wir werden weiter unten sehen, warum D einmal in zweiter Ordnung auftritt. $\mathcal{L}$ heißt Lagrange-Superdichte. Um zu sehen, dass diese Wirkung in der Tat manifest supersymmetrisch ist, gehen wir wie folgt vor: Unter einer susy Transformation mit einem Fermi-Parameter α variiert das Superfeld nach Definition gemäß $\delta X^a = \alpha Q X^a$. Wir wollen nun wissen, wie die Lagrange-Superdichte sich unter dieser Variation ändert. Um diese berechnen zu können, brauchen wir zunächst die Variation δDX^a von DX^a.

ÜBUNG. Zeigen Sie zunächst, dass $[\alpha Q, D] = 0$ ist, wobei hier jetzt der Kommutator gemeint ist, da αQ eine bosonische Größe ist. Zeigen Sie damit, dass die Variation $\delta DX^a = D\delta X^a$ ist. Daher heißt DX^a auch kovariante Ableitung von X^a. Berechnen Sie schließlich die Variation der Lagrange-Superdichte zu $\delta\mathcal{L} = \alpha(\mathrm{i}\tau\partial_t - \partial_\tau)\mathcal{L}$, was wir natürlich auch durch direktes Einsetzen für Q hätten finden können.

Manifeste Supersymmetrie. Wir haben also $\delta\mathcal{L} = \alpha(\mathrm{i}\tau\partial_t - \partial_\tau)\mathcal{L}$. Der erste Term, $\mathrm{i}\alpha\tau\partial_t\mathcal{L} = \partial_t(\mathrm{i}\alpha\tau\mathcal{L})$, ist eine totale (genauer exakte) Ableitung nach t und trägt somit aufgrund der üblichen Randbedingungen bei Variationen nach Integration nicht bei. Der zweite Term, $-\alpha\partial_\tau\mathcal{L}$, ist unabhängig von τ, da $\mathcal{L}$ höchstens linear in τ sein kann. Die Integration dieses Terms über τ muss daher (siehe Übung letzte Woche) verschwinden. Somit finden wir

$$\delta S = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\delta\mathcal{L} = \text{“\textit{Oberflächen-Term}”}$$

so dass die Wirkung manifest supersymmetrisch ist. Man beachte nun, dass $\mathcal{L}$ das Produkt zweier Superfelder ist. Wie wir gerade gesehen haben, verhält sich $\mathcal{L}$ unter susy Transformationen genauso wie ein Superfeld. Dies ist eine sehr generell gültige Tatsache. Sie folgt nämlich allein daraus, dass der Supersymmetrie-Generator αQ wie eine Derivation auf Superfeldern wirkt, also die Leibniz-Regel erfüllt. Damit ist diese Aussage sofort in höheren Raum-Zeit-Dimensionen gültig: Das Produkt zweier Superfelder ist wieder ein Superfeld. Die Superfelder formen in natürlicher Weise die Struktur eines Ringes.

ÜBUNG. Finden Sie nun die Supersymmetrie-Transformationsgesetze der x^a und θ^a explizit, indem Sie Q einsetzen. Es ist nützlich, im folgenden Ableitungen $\partial_t y = \dot{y}$ abzukürzen. Als Ergebnis sollten Sie erhalten:

$$\delta x^a = \alpha\theta^a\,, \quad \delta\theta^a = \mathrm{i}\alpha\dot{x}^a\,.$$

ÜBUNG. Es hilft sehr, bei einfachen Beispielen die Superfelder in ihre Komponenten auszuschreiben. Geben Sie die Entwicklung in Komponenten für DX^a sowie für DDX^a an. Setzen Sie dies alles in die Wirkung ein und führen Sie die τ-Integration über die Grassmann-Variable explizit aus. Dies ist ein Besipiel dafür, dass die Grassmann-Integrationen, die beim Berechnen der Wirkung typischerweise auftreten, oft explizit und vollständig ausgeführt werden können. Als Ergebnis sollten Sie schließlich

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \sum_a \left(\dot{x}^a\dot{x}^a + \mathrm{i}\theta^a\dot{\theta}^a\right)$$

finden. Der erste Term ist nichts anderes als die kinetische Energie eines gewöhnlichen Punktteilchens mit Masse $m = 1$. Der zweite Term, $\frac{1}{2}\sum_a \theta^a\dot{\theta}^a$, wird durch die Supersymmetrie diktiert und ist neu. Etwas salopp kann man sagen, dass dies der Beitrag des neuen Grassmann-Freiheitsgrades des Superteilchens zur kinetischen Energie darstellt. Beachten Sie, dass dieser Term kein Oberflächen-Term ist, da er nicht als totale zeitliche Ableitung geschrieben werden kann (warum?). Zeigen Sie schließlich noch, dass die Bewegungsgleichungen für x^a und θ^a lauten:

$$\ddot{x}^a = 0\,, \quad \dot{\theta}^a = 0\,.$$

WECHSELWIRKUNG

Soweit haben wir offensichtlich ein freies Superteilchen betrachtet. Um auch Wechselwirkung berücksichtigen zu können, sollten wir versuchen, den gewöhnlichen Potentialterm $V(x)$ zu $V(X(t,\tau))$ zu verallgemeinern,

$$V(X) = V(x) + \sum_a \frac{\partial}{\partial X^a}V\Big|_{\tau=0}\theta^a\tau\,.$$

Das funktioniert nur leider nicht, da der Term $V(x)$ bei der Integration über τ einfach verschwindet. Ganz verwunderlich ist das nicht, da wir unseren Superraum ohne Raumrichtungen eingeführt haben. Interessanterweise gibt es einen Ausweg, ohne dass wir eine bosonische Raumrichtung einführen müssen. Stattdessen betrachten wir einen $(1|2)$ Superraum, also mit $N = 2$ erweiterter Supersymmetrie, mit zwei Super-Ladungen. Die Koordinaten sind nun (t, τ^1, τ^2) und ein Superfeld hat allgemein die Form

$$X^a(t,\tau^\alpha) = x^a(t) + \theta^a_\alpha(t)\tau^\alpha + \mathrm{i}F^a(t)\tau^1\tau^2\,, \quad a = 1,\ldots,d\,.$$

Die Supersymmetrie-Generatoren lauten damit (man beachte, dass wir hier mit oberen und unteren Indizes etwas schlampig sind)

$$Q_\alpha = \mathrm{i}\tau^\alpha\partial_t - \partial_\alpha\,, \quad H = \mathrm{i}\partial_t\,,$$

wobei wir $\partial_\alpha = \partial/\partial\tau^\alpha$ schreiben.

ÜBUNG. Zeigen Sie, dass wir nun die folgende Algebra erhalten:

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = -2\delta_{\alpha\beta}H\,, \quad [Q_\alpha, H] = [H,H] = 0\,.$$

Wirkung für $N = 2$. Wir können wieder Rechts-Supertranslationen einführen, $D_\alpha = \mathrm{i}\tau^\alpha\partial_t + \partial_\alpha$. Die Wirkung für einen $N = 2$ Superpunkt ist dann

$$S' = -\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau^2\,\mathrm{d}\tau^1\,\mathcal{L}' = -\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau^2\,\mathrm{d}\tau^1\,\frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\sum_a D_\alpha X^a D_\beta X^a\,.$$

Einige Unterschiede zwischen der $N = 1$ Wirkung S und der $N = 2$ Wirkung S' fallen sofort auf. In S traten insgesamt drei kovariante Ableitungen D auf, in S' sind es nur zwei. Dass die Anzahl der kovarianten Ableitungen nicht die gleiche sein kann, sieht man sofort ein, wenn man bedenkt, dass in S eine Grassmann-Integration auftritt, in S' aber zwei. Die Wirkung selbst muss ein bosonische Größe sein, so dass $\mathcal{L}$ fermionisch sein muss, $\mathcal{L}'$ jedoch bosonisch. Eine kovariante Ableitung für S ist jedoch zuwenig, weil man dann nur einen trivialen Oberflächen-Term erhält, denn $D(X^aX^a) = 2DX^aX^a = 2X^aDX^a$. Auch aus Dimensionsgründen ist die Anzahl der kovarianten Ableitungen jeweils korrekt, da D, D_α, $\mathrm{d}\tau$ und $\mathrm{d}\tau^\alpha$ alle die Dimension [Zeit]$^{-1/2}$ besitzen.

ÜBUNG. Führen Sie die Grassmann-Integrationen in S' explizit aus, um die Wirkung in den Komponenten zu erhalten:

$$S' = \int \mathrm{d}t \frac{1}{2} \sum_a \left(\dot{x}^a \dot{x}^a + \mathrm{i} \sum_\alpha \theta^a_\alpha \dot{\theta}^a_\alpha + F^a F^a \right) .$$

Wechselwirkung. Man beachte zunächst, dass die Bewegungsgleichungen für die F^a trivial sind, $F^a = 0$. Diese Variablen zeigen also keine zeitliche Entwicklung, sie sind reine Hilfsvariablen, die eliminiert werden können. Wir können jedoch nun zu S' einen Wechselwirkungsterm hinzufügen,

$$S_{\text{int}} = \mathrm{i} \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau^2 \, \mathrm{d}\tau^1 \, W(X^a(t, \tau^\alpha)) ,$$

wobei W eine beliebige Funktion der Superfelder X^a ist. Man kann nun mit einer Argumentation analog zum $N = 1$ Fall zeigen, dass $S' + S_{\text{int}}$ weiterhin manifest supersymmetrisch ist. Naiv würde man erwarten, dass es immer noch keinen Anteil in Form einer Funktion $V(x(t))$ geben kann, der die Grassmann-Integrationen überlebt, aber die Hilfsvariablen F^a führen hier zu einer echten Überraschung.

ÜBUNG. Führen Sie die Grassmann-Integrationen in S_{int} aus und zeigen Sie damit:

$$S_{\text{int}} = -\int \mathrm{d}t \left(\frac{\partial W(y)}{\partial y^a} F^a \bigg|_{y^a = x^a(t)} - \mathrm{i} \, \frac{\partial^2 W(y)}{\partial y^b \partial y^a} \bigg|_{y^a = x^a(t)} \theta^a_1 \theta^b_2 \right) .$$

Wechselwirkung (2). Die Bewegungsgleichungen für die F^a sind nun weniger trivial, obwohl sie nach wie vor rein algebraischer und nicht differentieller natur sind: $F^a = \frac{\partial W(x)}{\partial x^a}$. Setzt man dies ein, so findet man schließlich

$$S'' = S' + S_{\text{int}} = \int \mathrm{d}t \left(\frac{1}{2} \sum_a \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{1}{2} \mathrm{i} \sum_{a,\alpha} \theta^a_\alpha \dot{\theta}^a_\alpha - V(x^b) + \mathrm{i} \, \frac{\partial^2 W(y)}{\partial y^b \partial y^a} \bigg|_{y^a = x^a(t)} \theta^a_1 \theta^b_2 \right) .$$

Der Potentialterm ist jetzt hier durch das positiv definite Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial W(y)}{\partial y^a} \frac{\partial W(y)}{\partial y^a} \bigg|_{y^a = x^a(t)}$$

gegeben.