 Michael Flohr

SUPERSYMMETRISCHE FELDTHEORIE IN $1 + 1$ DIMENSIONEN

In der Vorlesung haben wir als ein erstes wichtiges Beispiel die Feldtherie eines skalaren Superfeldes für eine $1 + 1$ dimensionale Raumzeit behandelt. Der Vorteil dieses Beispiels ist, dass aufgrund der niedrigen Dimension der Superraum $B_L^{2,2}$ ebenfalls klein ist und das Superfeld nur wenige Komponenten hat. Dies erlaubt, viele Rechnungen sehr explizit durchzuführen, ohne dass die Formeln allzu unübersichtlich werden. Dies wird weiter dadurch vereinfacht, dass wir in $1+1$ Dimensionen reelle, also Majorana-Spinoren haben. Jeder Spinor θ hat also nur zwei reelle Komponenten θ_α, $\alpha = 1, 2$, $\theta^* = \theta$. Um im folgenden weitgehend auf Indizes verzichten zu können, führt man noch die Notation $\bar\theta = \theta^t J$ ein, wobei J die komplexe Struktur ist. In unserem Fall ist $J_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Damit wird ein Skalarprodukt im Spinorraum definiert, $\bar\phi\psi = \bar\psi\phi = \phi^t J\psi = \phi_\alpha J_{\alpha\beta}\psi_\beta$. Es ist hier nicht nötig, zwischen unteren und oberen Indizes zu unterscheiden.

Man beachte, dass diese Notationen speziell für den $1 + 1$ dimensionalen Fall gelten. Wir werden später natürlich auch $3+1$ dimensionale Theorien betrachten, wo wir Weyl-Spinoren haben. Dort hat der gequerte Spinor eine völlig andere Bedeutung! Hier noch ein paar nützliche Rechenregeln mit den 2-Majorana-Spinoren: $\theta = -(\bar\theta J)^t$ und insbesondere können wir $\theta_1\theta_2 = \frac{1}{2}\bar\theta\theta$ schreiben. Die wichtigste Fierz-Identität in diesem Beispiel ist

$$(\bar\theta\phi)\theta = -\frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\phi\,, \quad \text{also} \quad (\bar\theta_\alpha\phi_\alpha)\theta_\beta = -\frac{1}{2}(\bar\theta_\alpha\theta_\alpha)\phi_\beta\,.$$

Schließlich benötigt man noch ein paar einfache Regeln im Zusammenhang mit J, nämlich $J^t = J^{-1} = -J$, $J(\gamma^\mu)^t J = -\gamma^\mu$, $\mathrm{tr}(J^2) = -2$, $\mathrm{tr}(J\gamma^\mu J) = 0$. Wer es sehr explizit will, kann für die Wahl der Metrik $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1)$ die Gamma-Matrizen als $\gamma^0 = \mathrm{i}\sigma_2 = J$ und $\gamma^1 = -\sigma_1$ setzen, so dass $\gamma^0\gamma^1 = -\sigma_3$ ist.

Das Superfeld. Wie in der Vorlesung erklärt, kann das Superfeld $\phi(x^0, x^1, \theta_1, \theta_2) \equiv \phi(x, \theta)$ in Komponenten ausgeschrieben werden. Um dies so kompakt wie möglich zu machen, kann man durch geeignete Benennung zum Beispiel die Komponenten, die mit θ_1 und θ_2 auftreten, in einen Spinor ψ zusammenfassen, so dass der Beitrag einfach durch $\bar\theta\psi = \theta_1\psi_2 - \theta_2\psi_1$ gegeben wird. Wir erhalten damit den allgemeinsten Ansatz

$$\phi(x, \theta) = A(x) + \mathrm{i}(\bar\theta\psi(x)) + \frac{1}{2}\mathrm{i}(\bar\theta\theta)F(x)\,.$$

Die susy Generatoren. Gemäß der allgemeinen Struktur für Supersymmetrie sollten wir bei einfacher Supersymmetrie $(N = 1)$ genau einen 2-Spinor Q_α an susy Generatoren haben. Diese lassen sich in der Form

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^\alpha} - \mathrm{i}(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu$$

angeben. Dazu ist es nützlich, via $\bar\theta = \theta^t J$ die Komponenten $\bar\theta_1 = -\theta_2$ und $\bar\theta_2 = \theta_1$ zu indentifizieren. Eine susy Variation (infinitesimale susy Transformation) muss gerade im Superraum sein. Daher ist $\delta\phi = (\bar\varepsilon Q)\phi$, was durch geeignete Wahl von ε jede Kombination der beiden susy Transformationen beinhaltet. Man findet nun

$$\delta\phi = \varepsilon_\alpha J_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^\beta} - \mathrm{i}(\gamma^\mu\theta)_\beta\partial_\mu\right)\left(A(x) + \mathrm{i}\bar\theta\psi(x) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\bar\theta\theta F(x)\right) = -\mathrm{i}\bar\varepsilon\gamma^\mu\theta\partial_\mu A + \mathrm{i}\bar\varepsilon\psi + \bar\varepsilon\gamma^\mu\theta\bar\theta\partial_\mu\psi + \mathrm{i}\bar\varepsilon\theta F\,,$$

was in Komponenten die Form $\delta\phi = \delta A + \mathrm{i}\bar\theta\delta\psi + \frac{1}{2}\mathrm{i}\bar\theta\theta\delta F$ haben muss, die Variationen der Komponentenfelder als

$$\delta A = \mathrm{i}\bar\varepsilon\psi\,, \quad \delta\psi = (\gamma^\mu\partial_\mu A + F)\varepsilon\,, \quad \delta F = \mathrm{i}\bar\varepsilon\gamma^\mu\partial_\mu\psi\,.$$

Kovariante Ableitung. Zu jeder Symmetrie kann man versuchen, eine kovariante Ableitung zu definieren. Allgemein muss so eine Ableitung D mit dem Generator X der Symmetrie vertauschen, $[D, X] = 0$. Im Falle von Supersymmetrie suchen wir also einen Ableitungsoperator D_α mit der Eigenschaft $[D_\alpha, Q_\beta] = 0$, was insbesodnere auch $[\bar DD, Q_\alpha] = 0$ impliziert. Eine solche Ableitung ist leicht zu finden,

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^\alpha} + \mathrm{i}(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu\,.$$

In Anlehnung an den nicht-supersymmetrischen Fall macht man für eine manifest susy invariante Lagrange-Dichte den Ansatz

$$\mathcal{L}_{(0)} = \frac{1}{4}\phi^+\bar DD\phi\,.$$

ÜBUNG. Geben Sie $\mathcal{L}_{(0)}$ ausgeschrieben in den Komponenten-Feldern an. Berechnen Sie dazu zunächst $\bar{D}D\phi = D^t J D\phi = D_\alpha J_{\alpha\beta} D\phi = -J_{\beta\alpha} D_\alpha D_\beta \phi$.

Lösung: Wir müssen den Ausdruck

$$\bar{D}D\phi = -J_{\beta\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} + \mathrm{i}(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\beta} + \mathrm{i}(\gamma^\nu\theta)_\beta\partial_\nu\right)\left(A + \mathrm{i}\bar{\theta}\psi + \frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\theta}\theta F\right)$$

ausrechnen. Ausgeschrieben ergibt das

$$\begin{aligned}
\bar{D}D\phi &= -J_{\beta\alpha}\left(\partial_{\bar{\theta}^\alpha}\partial_{\bar{\theta}^\beta} - (\bar{\theta}\gamma^\mu J)_\alpha(\bar{\theta}\gamma^\nu J)_\beta\partial_\mu\partial_\nu + \mathrm{i}\partial_{\bar{\theta}^\alpha}(\bar{\theta}\gamma^\nu J)_\beta\partial_\nu + \mathrm{i}(\bar{\theta}\gamma^\mu J)_\alpha\partial_\mu\partial_{\bar{\theta}^\beta}\right)\left(A + \mathrm{i}\bar{\theta}\psi + \frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\theta}\theta F\right) \\
&= -J_{\beta\alpha}\left(-J_{\alpha\beta}F - (\bar{\theta}\gamma^\mu J)_\alpha)(\bar{\theta}\gamma^\nu J)_\beta\partial_\mu\partial_\nu A + \left[-\mathrm{i}(\bar{\theta}\gamma^\nu J)_\beta\partial_\nu\partial_{\bar{\theta}^\alpha} + \mathrm{i}(\bar{\theta}\gamma^\mu J)_\alpha\partial_\mu\partial_{\bar{\theta}^\beta}\right]\left(\mathrm{i}\bar{\theta}\psi + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

Beim letzten Term kann A nicht mehr beitragen, da dies ohne θ auftritt. Für den ersten Term macht man sich zunutze, dass $\frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\theta}\theta F = \mathrm{i}\theta_1\theta_2 F = \mathrm{i}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 F$ ist, und somit $\partial_{\bar{\theta}^\alpha}\partial_{\bar{\theta}^\beta}(\mathrm{i}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 F) = -\mathrm{i}FJ_{\alpha\beta}$ wird. Beim zweiten Term muss man sich lediglich klar machen, dass nur Wörter aus höchstens zwei θ bzw. $\bar{\theta}$ Spinoren ungleich null sein können, da wir nicht mehr als zwei Buchstaben zur Verfügung haben. Etwas aufwendiger ist es, einzusehen, dass man die Ableitung $\partial_{\bar{\theta}^\alpha}$ durch $(\bar{\theta}\gamma^\nu J)_\beta\partial_\nu$ durchziehen kann. Dies gilt, wenn man beachtet, dass zum Schluss noch mit $-J_{\beta\alpha}$ kontrahiert wird. Wir haben dann $-J_{\beta\alpha}\mathrm{i}\partial_{\bar{\theta}^\alpha}\left((\bar{\theta}\gamma^\nu J)_\beta\partial_\nu\right) = -J_{\beta\alpha}\left(\mathrm{i}\partial_{\bar{\theta}^\alpha}(\bar{\theta}_\delta(\gamma^\nu)_{\delta\gamma}J_{\gamma\beta})\partial_\nu\right) = -\mathrm{i}J_{\beta\alpha}(\delta_{\alpha\delta}(\gamma^\nu)_{\delta\gamma}J_{\gamma\beta})\partial_\nu = -\mathrm{i}J_{\beta\alpha}(\gamma^\nu)_{\alpha\gamma}J_{\gamma\beta}\partial_\nu = -\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(J\gamma^\nu J)\partial_\nu = 0$.

Im nächsten Schritt vereinfachen wir dies zu

$$\bar{D}D\phi = -J_{\beta\alpha}\left(-\mathrm{i}J_{\alpha\beta}F - (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha)(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta A + (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta\psi_\alpha - (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\psi_\beta + \left[-\mathrm{i}(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta\partial_{\bar{\theta}^\alpha} + \mathrm{i}(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\partial_{\bar{\theta}^\beta}\right]\frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\theta}\theta F\right)\,,$$

wobei wir $\partial_{\bar{\theta}^\alpha}\bar{\theta}\psi = \partial_{\bar{\theta}^\alpha}(\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2)^t\binom{\psi_1}{\psi_2} = \partial_{\bar{\theta}^\alpha}\bar{\theta}_\beta\psi_\beta = \delta_{\alpha\beta}\psi_\beta = \psi_\alpha$ verwendet haben (und analog für $\partial_{\bar{\theta}^\beta}\bar{\theta}\psi$). Den letzten Term $[\ldots]\bar{\theta}\theta F$ können wir auf ähnliche Weise weiter ausrechnen: Wir erhalten die beiden Ausdrücke $(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\partial_{\bar{\theta}^\beta}\bar{\theta}\theta F = (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\theta_\beta F \equiv M_{\alpha\beta}F$ und $-(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta\partial_{\bar{\theta}^\alpha}\bar{\theta}\theta F = (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta\theta_\alpha F \equiv M_{\beta\alpha}F$. Also insgesamt $J_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta}F - J_{\beta\alpha}M_{\beta\alpha}F = J_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta}F + J_{\alpha\beta}M_{\beta\alpha}F$, da $J^t = -J$ ist. Bennennen wir die Indizes in der zweiten Hälfte um, so finden wir $J_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta}F + J_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta}F = 2J_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta}F$. Einsetzen ergibt dann $\mathrm{i}[(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\partial_{\bar{\theta}^\beta} - (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta\partial_{\bar{\theta}^\alpha}]\frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\theta}\theta F = +\mathrm{i}2(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\frac{1}{2}\mathrm{i}\theta_\beta F = -(\bar{\theta}\not{\partial})_\alpha F\theta_\beta$, wobei wir zuletzt noch ausgenutzt haben, dass F gerade ist. Also lautet unser gesuchter Ausdruck nun

$$\begin{aligned}
\bar{D}D\phi &= -J_{\beta\alpha}\left(-\mathrm{i}J_{\alpha\beta}F - (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha)(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta A + (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta\psi_\alpha - (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\psi_\beta - (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha F\theta_\beta\right) \\
&= -2\mathrm{i}F + 2\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\partial^\mu\partial_\mu A + 2\bar{\theta}\not{\partial}\psi + 0\,.
\end{aligned}$$

Um die letzte Zeile zu erhalten, sind wieder ein paar Nebenrechnungen erforderlich. Der erste Term ergibt sich einfach aus $-J_{\beta\alpha}J_{\alpha\beta} = \mathrm{tr}(J^{-1}J) = \mathrm{tr}\,\mathbb{1} = +2$. Der zweite Term ist leider kompliziert. Wir geben daher hier die ganze Rechnung an:

$$\begin{aligned}
J_{\beta\alpha}(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha)(\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta A &= J_{\beta\alpha}(\bar{\theta}_\delta(\gamma^\mu)_{\delta\gamma}J_{\gamma\alpha})(\bar{\theta}_\sigma(\gamma^\nu)_{\sigma\rho}J_{\rho\beta})\partial_\mu\partial_\nu A \\
&= -J_{\beta\alpha}(\bar{\theta}_\delta(\gamma^\mu)_{\delta\gamma}J_{\gamma\alpha})((\gamma^\nu)_{\beta\epsilon}\theta_\epsilon)\partial_\mu\partial_\nu A \quad \text{da} \quad \bar{\theta}_\alpha = (\theta^t J)_\alpha = (J^t\theta)_\alpha = -(J\theta)_\alpha \\
&= -(\bar{\theta}_\delta(\gamma^\mu)_{\delta\gamma}(\gamma^\nu)_{\gamma\epsilon}\theta_\epsilon)\partial_\mu\partial_\nu A \quad \text{da} \quad -(-J_{\beta\alpha}J_{\alpha\gamma}) = -(J^{-1}J)_{\beta\gamma} = -\delta_{\beta\gamma} \\
&= -\bar{\theta}_\delta\theta_\epsilon(\gamma^\mu\gamma^\nu)_{\delta\epsilon}\partial_\mu\partial_\nu A \\
&= +\frac{1}{2}\bar{\theta}_\delta\theta_\delta(\gamma^\mu\gamma^\nu)_{\epsilon\epsilon}\partial_\mu\partial_\nu A \quad \text{mit der Fierz-Identität} \\
&= \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\eta^{\mu\nu}\mathrm{tr}\,\mathbb{1}\,\partial_\mu\partial_\nu A \quad \text{da} \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \neq 0 \text{ nur für } \mu = \nu \\
&= 2\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\partial^\mu\partial_\mu A \;\equiv\; \bar{\theta}\theta\,\Box A\,.
\end{aligned}$$

Der dritte Term berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
-J_{\beta\alpha}\left((\bar{\theta}\not{\partial}J)_\beta\psi_\alpha - (\bar{\theta}\not{\partial}J)_\alpha\psi_\beta\right) &= -J_{\beta\alpha}\bar{\theta}_\delta\not{\partial}_{\delta\gamma}J_{\gamma\beta}\psi_\alpha + J_{\beta\alpha}\bar{\theta}_\delta\not{\partial}_{\delta\gamma}J_{\gamma\alpha}\psi_\beta \\
&= \bar{\theta}_\delta\not{\partial}_{\delta\gamma}\delta_{\gamma\alpha}\psi_\alpha + \bar{\theta}_\delta\not{\partial}_{\delta\gamma}\delta_{\gamma\beta}\psi_\beta \\
&= \bar{\theta}_\delta\not{\partial}_{\delta\alpha}\psi_\alpha + \bar{\theta}_\delta\not{\partial}_{\delta\beta}\psi_\beta \\
&= 2\bar{\theta}\not{\partial}\psi\,.
\end{aligned}$$

Der letzte Term, also die ‘0’, ergibt sich schließlich aus dem Beitrag

$$\begin{aligned}
+J_{\beta\alpha}(\bar{\theta}\partial\!\!\!/ J)_\alpha F\theta_\beta &= J_{\beta\alpha}(\bar{\theta}\gamma^\mu J)_\alpha\theta_\beta(\partial_\mu F) \\
&= (\bar{\theta}\gamma^\mu J)_\alpha(\theta J)_\alpha(\partial_\mu F) \\
&= (\bar{\theta}\gamma^\mu JJ\theta)(\partial_\mu F) \\
&= -(\bar{\theta}\gamma^\mu\theta)(\partial_\mu F) \\
&= 0 \quad \text{da} \quad \bar{\theta}_\alpha(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta_\beta = -\theta_1\theta_2\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0\,.
\end{aligned}$$

Das endgültige Resultat ist also

$$\bar{D}D\phi = 2\left(-\mathrm{i}F + \bar{\theta}\partial\!\!\!/\psi + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\,\Box A\right)\,.$$

Das müssen wir, um die vollständige Lagrange-Dichte zu erhalten, mit ϕ^+ multiplizieren. Da alle Spinoren reell sind, ist ϕ^+ einfach gegeben als

$$\phi^+ = \left(A + \mathrm{i}\bar{\psi}\theta + \frac{1}{2}\mathrm{i}F\bar{\theta}\theta\right)\,.$$

Nun brauchen wir nicht alles auszumultiplizieren, da in der Wirkung nur der Term die Integrationen über die Grassmann-Variablen θ_α überleben kann, der proportional zu $\theta_1\theta_2$ ist. Wir finden damit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\phi^+\bar{D}D\phi &= \frac{1}{2}\left(A + \mathrm{i}\bar{\psi}\theta + \frac{1}{2}\mathrm{i}F\bar{\theta}\theta\right)\left(-\mathrm{i}F + \bar{\theta}\partial\!\!\!/\psi + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\,\Box A\right) \\
&= \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\left(\frac{1}{2}A\,\Box A + \frac{1}{2}F^2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi\right) + \mathcal{O}((\bar{\theta})^1) + \mathcal{O}((\bar{\theta})^0) \\
&= -\frac{1}{2}\theta_1\theta_2\left(-A\,\Box A - F^2 + \mathrm{i}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi\right)\,.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir wieder eine Fierz-Identität verwendet, um den Term $(\bar{\psi}\theta)(\bar{\theta}\partial\!\!\!/\psi) = (\bar{\theta}\psi)(\bar{\theta}\partial\!\!\!/\psi) = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi)$ umzuschreiben.

Die Wirkung ist dann bis auf Oberflächenterme, die durch eine partielle Integration entstehen, um $A\,\Box A$ in $\partial^\mu A\partial_\mu A$ umzuschreiben, gegeben durch

$$S_{(0)} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2x\left(\partial A\partial A + \mathrm{i}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - F^2\right)\,.$$

Man kann nun nachrechnen, dass diese Wirkung, bis auf Oberflächenterme, invariant unter den einzelnen Variationen δA, $\delta\psi$ und δF der Komponenten-Felder ist. Die Bewegungsgleichungen der Felder sind für A die Klein-Gordon-Gleichung für ein freies, masseloses skalares Feld, für ψ die Dirac-Gleichung für ein freies, masseloses Spin-$\frac{1}{2}$ Fermion, und für F lautet sie einfach $F = 0$. Das Feld F propagiert also nicht, sondern ist ein reines Hilfsfeld. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, kann man F aber nicht einfach so identisch null setzen, da zum einen δF auch dann einen Beitrag liefert, wenn zunächst F null gesetzt wurde, zum anderen F in $\delta\psi$ auftritt. In der Tat ist nach Einsetzen von $F = 0$ Supersymmetrie nur noch “on-shell” realisiert, also nur noch modulo Terme, die durch Einsetzen der Bewegungsgleichungen für A und ψ verschwinden. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass für die truncierten Variationen $\delta A = \mathrm{i}\bar{\varepsilon}\psi$ und $\delta\psi = \partial\!\!\!/ A\varepsilon$ (es gibt dann keine Variation δF) in der Tat der Kommutator zweier Variationen $[\delta,\delta']\psi \propto a^\mu P_\mu\psi$ nur dann proportional zu einer Translation ist (also a^μ dürfen keine Spinor-Indizes tragen), wenn gleichzeitig $\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi = 0$ gefordert wird.