SPINOREN IN $3+1$ DIMENSIONEN

Christoph hat in der Vorlesung chirale und Vektor- Superfelder für $N=1$ supersymmetrische Theorien in $(3+1)$ Dimensionen eingeführt. In einer Raumzeit dieser Signatur haben wir Majorana-Spinoren, die vier reelle Komponenten haben. Es ist aber für viele Rechnungen sinnvoller, statt mit einem Majorana- mit zwei Weyl-Spinoren zu arbeiten. Der Majorana-Spinore Ψ_M ist dann einfach ein 4-Spinor, der aus zwei Weyl-Spinoren gebildet wird, ψ_α und $\bar\chi^{\dot\alpha}$, $\alpha,\dot\alpha=1,2$, also $\Psi_M=\binom{\psi}{\bar\psi}$. Einen Dirac-Spinor erhalten wir demnach einfach dadurch, dass wir die untere Komponente unabhängig von der oberen wählen, $\Psi_D=\binom{\psi}{\bar\chi}$. Für die Weyl-Spinoren benötigen wir statt der Dirac-Matrizen γ^μ die Matrizen $\sigma^\mu=(1\!\!1_2,\boldsymbol{\sigma})$ und $\bar\sigma^\mu=(1\!\!1_2,-\boldsymbol{\sigma})=\sigma_\mu$. In der Weyl-Darstellung sind die γ-Matrizen dann gegeben als $\gamma^\mu=\begin{pmatrix}0&\sigma^\mu\\ \bar\sigma^\mu&0\end{pmatrix}$. Damit ist $\gamma_5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}-1\!\!1&0\\0&1\!\!1\end{pmatrix}$. Also sind die beiden oberen Komponenten eines Dirac-Spinors in der Weyl-Darstellung links-chiral, die beiden unteren rechts-chiral.

Der üblichen Konvention folgend werden die Indizes für “normale” Weyl-Spinoren unten geschrieben, ψ_α, und für “gequerte” Weyl-Spinoren oben mit einem Punkt, $\bar\chi^{\dot\alpha}$. Wir *definieren* nun die komplex konjugierten Komponenten als $(\psi_\alpha)^*\equiv\bar\psi_{\dot\alpha}$ und $(\bar\chi^{\dot\alpha})^*\equiv\chi^\alpha$. Das Herauf- und Herunterziehen der Indizes erfolgt mittels $\epsilon_{\alpha\beta}$ und $\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}$ bzw. deren Inversen $\epsilon^{\alpha\beta}$ und $\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$. Diese Matrizen sind, je nach Konvention, durch $\pm\mathrm{i}\sigma^2$ gegeben mit $\epsilon_{\alpha\beta}=\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}=-\epsilon^{\alpha\beta}=-\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}$. Dass dies die korrekte Wahl für die “Metrik” im Spinorraum ist, sieht man ein, wenn man die komplex konjugierten Komponenten mit denen der Ladungskonjugation in Beziehung setzt. Bis auf eine Phase ist nämlich die Ladungskonjugation $C\sim\gamma^0\gamma^2$. Damit haben wir $\chi_\alpha=\epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta$, $\bar\psi^{\dot\alpha}=\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\psi_{\dot\beta}$, $\chi^\alpha=\epsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta$ und $\bar\psi_{\dot\alpha}=\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta}$. Die unterschiedliche Konventionen für die Stellung der Indices im Skalarprodukt $(\chi\psi)$ und $(\bar\chi\bar\psi)$ hat einen weiteren Grund. Mit dieser Konvention kann man nämlich $(\chi\psi)^\dagger=(\psi^\dagger\chi^\dagger)$ schreiben, wobei für die Komponenten das hermitesch Konjugierte gerade das komplex Konjugierte ist, $(\psi_\alpha)^\dagger=(\psi_\alpha)^*=\bar\psi_{\dot\alpha}$, $(\chi^\alpha)^\dagger=(\chi^\alpha)^*=\bar\chi^{\dot\alpha}$.

Es ist wichtig, folgende Eigenschaft der Pauli-Matrizen zu beachten: Mit unseren Konventionen tragen die Pauli-Matrizen gemischte Indizes, also ungepunktete und gepunktete, nämlich $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}$ und $(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\alpha}$. Man benötigt oft den Kommutator der γ-Matrizen, $\frac12\Sigma^{\mu\nu}\equiv\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$. Dieser ergibt sich zu $\frac12\Sigma^{\mu\nu}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}\sigma^{\mu\nu}&0\\0&\bar\sigma^{\mu\nu}\end{pmatrix}$, wobei $\sigma^{\mu\nu}=\frac14(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu-\sigma^\nu\bar\sigma^\mu)$ und $\bar\sigma^{\mu\nu}=\frac14(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu-\bar\sigma^\nu\sigma^\mu)$ ist.

ÜBUNG. Es seien $\Psi=\binom{\psi_\alpha}{\bar\chi^{\dot\alpha}}$ und $\Phi=\phi_\alpha,\bar\eta^{\dot\alpha}$ zwei Dirac-Spinoren, gegeben durch je zwei Weyl-Spinoren. Zeigen Sie damit die folgenden Identitäten

$$
\begin{array}{rcccl}
(\bar\Psi\Phi) &=& (\bar\psi\bar\eta)+(\chi\phi) &=& (\bar\Phi\Psi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\gamma_5\Phi) &=& (\bar\psi\bar\eta)-(\chi\phi) &=& -(\bar\Phi\gamma_5\Psi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\gamma^\mu\Phi) &=& (\chi\sigma^\mu\bar\eta)+(\bar\psi\bar\sigma^\mu\phi) &=& (\bar\Phi\gamma^\mu\Psi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\gamma^\mu\gamma_5\Phi) &=& (\chi\sigma^\mu\bar\eta)-(\bar\psi\bar\sigma^\mu\phi) &=& (\bar\Phi\gamma^\mu\gamma_5\Psi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\Sigma^{\mu\nu}\Phi) &=& \mathrm{i}(\chi\sigma^{\mu\nu}\phi)+\mathrm{i}(\bar\psi\bar\sigma^{\mu\nu}\bar\eta) &=& (\bar\Phi\Sigma^{\mu\nu}\Psi)^\dagger\,.
\end{array}
$$

Der Fall von Majorana-Spinoren ist damit leicht zu erhalten, indem man $\Psi=\binom{\psi_\alpha}{\bar\psi^{\dot\alpha}}$ und $\Phi=\phi_\alpha,\bar\phi^{\dot\alpha}$ setzt. Finden Sie damit die Identitäten

$$
\begin{array}{rcccccl}
(\bar\Psi\Phi) &=& (\bar\psi\bar\phi)+(\psi\phi) &=& (\bar\Phi\Psi) &=& (\bar\Psi\Phi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\gamma_5\Phi) &=& (\bar\psi\bar\phi)-(\psi\phi) &=& -(\bar\Phi\gamma_5\Psi) &=& -(\bar\Psi\gamma_5\bar\Phi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\gamma^\mu\Phi) &=& (\psi\sigma^\mu\bar\phi)+(\bar\psi\bar\sigma^\mu\phi) &=& -(\bar\Phi\gamma^\mu\Psi) &=& -(\bar\Psi\gamma^\mu\Phi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\gamma^\mu\gamma_5\Phi) &=& (\psi\sigma^\mu\bar\phi)-(\bar\psi\bar\sigma^\mu\phi) &=& (\bar\Phi\gamma^\mu\gamma_5\Psi) &=& (\bar\Psi\gamma^\mu\gamma_5\Phi)^\dagger\,,\\
(\bar\Psi\Sigma^{\mu\nu}\Phi) &=& \mathrm{i}(\psi\sigma^{\mu\nu}\phi)+\mathrm{i}(\bar\psi\bar\sigma^{\mu\nu}\bar\phi) &=& -(\bar\Phi\Sigma^{\mu\nu}\Psi) &=& -(\bar\Psi\Sigma^{\mu\nu}\Phi)^\dagger\,.
\end{array}
$$

Fierz Identitäten. Natürlich braucht man zum Umsortieren von Spinoren in Monomen von Spinoren wieder Fierz Identitäten. Diese lassen sich prinzipiell immer aus den Vollständigkeitsrelationen der Darstellungsmatrizen der Clifford-Algebra ableiten. Für Weyl-Spinoren sind dies die Pauli-Matrizen σ^μ oder, äquivalent, die Matrizen $\sigma^{\mu\nu}$. Die entsprechenden Relationen lauten, ausgeschrieben in Komponenten,

$$
\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\epsilon}=\tfrac12\left[\delta_{\alpha\epsilon}\delta_{\gamma\beta}+(\sigma^k)_{\alpha\epsilon}(\sigma^k)_{\gamma\beta}\right]\,,\qquad \delta_\alpha{}^\beta\delta_\gamma{}^\epsilon=\tfrac12\left[\delta_\alpha{}^\epsilon\delta_\gamma{}^\beta-(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\epsilon(\sigma_{\mu\nu})_\gamma{}^\beta\right]\,.
$$

Aus der ersten Identität folgt zum Beispiel mit unseren Definitionen

$$
\delta_\alpha{}^\beta\delta^{\dot\gamma}{}_{\dot\epsilon}=\tfrac12(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\epsilon}(\bar\sigma_\mu)^{\dot\gamma\beta}\,.
$$

Einige der wichtigsten Fierz-Identitäten, die man auf diese Weise ableiten kann, seien hier aufgelistet:

$$\begin{array}{rcl} (\theta\phi)(\bar\chi\bar\eta) &=& -\frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar\eta)(\bar\chi\bar\sigma_\mu\phi)\,, \\ (\theta\phi)(\chi\eta) &=& -\frac{1}{2}\left[(\theta\eta)(\chi\phi)-(\theta\sigma^{\mu\nu}\eta)(\chi\sigma_{\mu\nu}\phi)\right]\,, \\ (\bar\theta\bar\phi)(\bar\chi\bar\eta) &=& -\frac{1}{2}\left[(\bar\theta\bar\eta)(\bar\chi\bar\phi)-(\bar\theta\bar\sigma^{\mu\nu}\bar\eta)(\bar\chi\bar\sigma_{\mu\nu}\bar\phi)\right]\,, \\ (\theta\phi)(\chi\theta) &=& -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\chi\phi)\,, \\ (\theta\phi)(\theta\chi) &=& -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\chi\phi)\,. \end{array}$$

Die letzten beiden Identitäten folgen aus der zweiten, indem man $\eta=\theta$ setzt und beachtet, dass $\theta\sigma_{\mu\nu}\theta=0$ ist. Es sei noch erwähnt, dass man das Produkt zweier Komponenten eines Spinors in das Skalarprodukt des Spinors mit sich umschreiben kann,

$$\theta^\beta\theta_\gamma=\tfrac{1}{2}(\theta\theta)\delta^\beta_{\ \gamma}\,.$$

Für Umformungen dieser Art ist es auch nützlich, einige Eigenschaften der Pauli-Matrizen zu kennen. So ist $\sigma^\mu\bar\sigma^\nu=\eta^{\mu\nu}+2\sigma^{\mu\nu}$ und damit $\mathrm{tr}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu)=2\eta^{\mu\nu}$.

ÜBUNG. Zeigen Sie die oben angegebenen Fierz Identitäten. Zeigen Sie dann auch die folgenden Identitäten:

$$\begin{array}{rcl} (\theta\phi)(\chi\sigma^\mu\bar\eta) &=& -\frac{1}{2}\left[(\theta\sigma^\mu\bar\eta)(\chi\phi)+2(\theta\sigma_\nu\bar\eta)(\chi\sigma^{\mu\nu}\phi)\right]\,, \\ (\theta\phi)(\bar\chi\bar\sigma^\mu\eta) &=& -\frac{1}{2}\left[(\theta\eta)(\bar\chi\bar\sigma^\mu\phi)-2(\theta\sigma^{\mu\nu}\eta)(\bar\chi\bar\sigma_\nu\phi)\right]\,, \\ (\theta\sigma^\mu\bar\phi)(\chi\sigma^\nu\bar\eta) &=& -\frac{1}{2}\left[(\theta\sigma^\mu\bar\eta)(\chi\sigma^\nu\bar\phi)+(\theta\sigma^\nu\bar\eta)(\chi\sigma^\mu\bar\phi)-\eta^{\mu\nu}(\theta\sigma^\lambda\bar\eta)(\chi\sigma_\lambda\bar\phi)-\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(\theta\sigma_\kappa\bar\eta)(\chi\sigma_\lambda\bar\phi)\right]\,. \end{array}$$

SUPERSYMMETRISCHE LAGRANGIANS

In der Vorlesung haben wir chirale und Vektor-Superfelder kennengelernt. Feldtheorien basieren meist auf einer Lagrangedichte, aus der die Bewegungsgleichungen der Felder abgeleitet werden können. Solche Lagrangians kann man aber nicht aus einem stringenten Prinzip konstruieren, man muss sie in einem gewissen Sinne raten bzw. aus Erfahrung in passender Form zusammenbasteln. Für die einfachsten Fälle sollen hier Lagrangians aufgeführt werden, die unseren physikalischen Erwartungen an eine supersymmetrische Welt entsprechen. In $(3+1)$ Dimensionen lassen sich $N=1$ Superfelder in insgesamt vier Grassmann-Variablen entwickeln, nämlich θ_α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$, $\alpha=1,2$. Die Supersymmetrie-Generatoren und zugehörigen kovarianten Ableitungen sind gegeben als

$$\begin{array}{rclcrcl} -\mathrm{i}Q_\alpha &=& \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}+\mathrm{i}(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha\partial_\mu\,, && -\mathrm{i}\bar Q_{\dot\alpha} &=& -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}-\mathrm{i}(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu\,, \\ D_\alpha &=& \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-\mathrm{i}(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha\partial_\mu\,, && D_{\dot\alpha} &=& -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}+\mathrm{i}(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu\,. \end{array}$$

Zusammen mit $-\mathrm{i}P_\mu=\partial_\mu$ ist dann eine Supertranslation gegeben durch $F\mapsto F'=\exp(-\mathrm{i}(\varepsilon Q+\bar\varepsilon\bar Q+a^\mu P_\mu))F$. Die Superalgebra ist gegeben durch

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}=\{\bar Q_{\dot\alpha},\bar Q_{\dot\beta}\}=0\,,\quad \{Q_\alpha,\bar Q_{\dot\alpha}\}=2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}P_\mu\,,\quad \{D_\alpha,Q_\beta\}=\{\bar D_{\dot\alpha},\bar Q_{\dot\beta}\}=\{D_\alpha,\bar Q_{\dot\alpha}\}=\{\bar D_{\dot\alpha},Q_\alpha\}=0\,.$$

Eine wichtige Bemerkung zu Ableitungen nach den Grassmann-Variablen: Damit alle Gleichungen konsistent sind, muss man beim Hoch- bzw. Runterziehen von Indices bei Ableitungen ein Extravorzeichen einbauen. Das hat den praktischen Vorteil, dass die Kombination $\varepsilon^\alpha\partial_{\theta^\alpha}=\varepsilon_\alpha\partial_{\theta_\alpha}$ invariant ist, wenn man die Indices verdreht. Damit erfüllt $(\varepsilon\partial_\theta)$ die Leibnitz-Regel, insbesondere, wenn man es auf Ausdrücke wie $(\theta\theta)=\theta^\alpha\theta_\alpha$ anwendet.

Chirale Superfelder. Chiral Superfelder Φ sind solche, die der Bedingung $\bar D_{\dot\alpha}\Phi=0$ genügen. Anti-chirale Felder genügen entsprechend der Bedingung $D_\alpha\Phi=0$. Aufgrund der spezifischen Kombination der Ableitung nach $\bar\theta$ und der nach x erfüllt jede Funktion $\Phi(y^\mu,\theta)$ mit $y^\mu=x^\mu-\mathrm{i}(\theta\sigma^\mu\bar\theta)$ die Bedingung $\bar D_{\dot\alpha}\Phi=0$. Damit hat ein chirales Feld die einfache Entwicklung

$$\Phi(y^\mu,\theta)=\phi(y)+\sqrt{2}\theta\psi(y)+(\theta\theta)F(y)\,.$$

ÜBUNG. Entwickeln Sie $\Phi(y,\theta)$ an der Stelle x um die vollständige Entwicklung eines chiralen Feldes zu erhalten,

$$\Phi(x,\theta,\bar\theta)=\phi(x)+\sqrt{2}\theta\psi(x)+(\theta\theta)F(x)-\mathrm{i}\partial_\mu\phi(x)(\theta\sigma^\mu\bar\theta)-\mathrm{i}\sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi(x)(\theta\sigma^\mu\bar\theta)-\tfrac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)(\theta\sigma^\mu\bar\theta)(\theta\sigma^\nu\bar\theta)\,.$$

Verwenden Sie die Fierz Identitäten, um dies in der Form

$$\Phi(x,\theta,\bar\theta)=\phi+\sqrt{2}(\theta\psi)+(\theta\theta)F-\mathrm{i}\partial_\mu\phi(\theta\sigma^\mu\bar\theta)+\mathrm{i}\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar\theta)-\tfrac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)$$

zu schreiben. Bilden Sie das konjugierte Feld

$$\Phi(x,\theta,\bar\theta)^\dagger=\phi^\dagger+\sqrt{2}(\bar\theta\bar\psi)+(\bar\theta\bar\theta)F^\dagger+\mathrm{i}\partial_\mu\phi^\dagger(\theta\sigma^\mu\bar\theta)-\mathrm{i}\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar\theta\bar\theta)(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi)-\tfrac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)$$

und zeigen Sie, dass es anti-chiral ist, dass es also die Bedingung $D_\alpha\Phi^\dagger=0$ erfüllt.

Produkte chiraler Felder. Chirale Felder sind recht einfach zu handhaben, weil das Produkt chiraler Felder wieder ein chirales Feld ist. Die wichtigsten Produkte sind die von zwei oder drei chiralen Feldern. Da es uns letztlich um Wirkungen von Lagrangians geht, reicht es aus, von dem Produkt lediglich den Koeffizieten von $(\theta\theta)$ zu kennen, da nur dieser im Wirkungsintegral nach Integration über die Grassmann-Varaiblen beiträgt. Wie in der Vorlesung eklärt, werden chirale Ausdrücke dabei nur über $\mathrm{d}^2\theta$ an der Stelle $\bar\theta = 0$ integriert, bzw. es wird über $\mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar\theta\delta^2(\bar\theta)$ integriert. Den entsprechenden Term nennt man den F-Term (aus naheliegenden Gründen). Für anti-chirale Felder geht die Argumentation völlig analog. Wir geben die F-Terme für die wichtigsten Produkte an:

$$\begin{aligned}
[\Phi_i]_F &= F_i\,,\\
[\Phi_i\Phi_j]_F &= \phi_i F_j + \phi_j F_i - (\psi_i\psi_j)\,,\\
[\Phi_i\Phi_j\Phi_k]_F &= \phi_i\phi_j F_k + \phi_i F_j\phi_k + F_i\phi_j\phi_k - (\psi_i\psi_j)\phi_k - (\psi_i\psi_k)\phi_j - (\psi_j\psi_k)\phi_i\,.
\end{aligned}$$

ÜBUNG. Anders sieht es aus, wenn wir das Produkt eines chiralen Feldes mit einem anti-chiralen Feld nehmen. Dieses Produkt ist nicht chiral. Die Komponente, die im Wirkungsintegral beiträgt, ist daher der Koeffizient von $(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)$, den man auch den D-Term nennt (das kommt von der üblichen Notation der Vektorfelder her, siehe weiter unten). Zeigen Sie mit Hilfe der Fierz Identitäten, dass der D-Term gegeben ist als

$$[\Phi_i^\dagger\Phi_j]_D = F_i^\dagger F_j + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi_i^\dagger\partial^\mu\phi_j - \tfrac{1}{4}\phi_i^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi_j - \tfrac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^\dagger\phi_j + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\bar\psi_i\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_j - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\partial_\mu\bar\psi_i\bar\sigma^\mu\psi_j\,.$$

Durch Vergleich mit den weiter unten beschriebenen Vektorfeldern erkennt man übrigens, dass dies für $j = i$ ein reeller Ausdruck, und daher ein Vektorfeld, ist.

Variation chiraler Felder. Es genügt außerdem, alles nur für die Komponenten ϕ, ψ und F auszurechnen, der Rest ist durch die chirale Form bereits festgelegt. Die Variation $\delta\Phi = -\mathrm{i}(\varepsilon Q + \bar\varepsilon\bar Q)\Phi$ hat die Form $\delta\Phi = \delta\phi + \sqrt{2}\theta\delta\psi + (\theta\theta)\delta F + \ldots$ mit den Variationen der Komponenten gegeben durch

$$\delta\phi = \sqrt{2}\varepsilon\psi\,,\quad \delta\psi = \sqrt{2}\varepsilon F - \mathrm{i}\sqrt{2}\partial_\mu\phi\sigma^\mu\bar\varepsilon\,,\quad \delta F = \mathrm{i}\sqrt{2}(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar\varepsilon)\,.$$

Lagrangian für chirale Felder. Der allgemeinste Lagrangian für chirale Felder, der zu renormierbaren Theorien führt, hat eine sehr einfache Form. Da bei chiralen Feldern die Komponenten höhren Grades in den Grassmann-Variablen bereits Ableitungen der Felder enthalten, setzt man die Lagrange-Dichte zunächst direkt in den Feldern an, und nicht in den kovarianten Ableitungen der Felder, wie wir es in den Beispielen für niedrigere Raumzeit-Dimensionen gemacht haben. Der kinetische Term ergibt sich aus $\sum_i[\Phi_i^\dagger\Phi_i]_D$. Massenterme und Wechselwirkung sind allein durch das *Superpotential* bestimmt, eine beliebige Funktion $W(\Phi)$ allein der chiralen Superfelder. In renormierbaren Theorien ist das Superpotential allerdings auf Terme bis zur dritten Ordnung in den chiralen Feldern beschränkt. Das daraus folgende Modell heißt *Wess-Zumino Modell*, sein Lagrangian ist also

$$\mathcal{L} = [\Phi_i^\dagger\Phi_i]_D + ([W(\Phi)]_F + \mathrm{h.c.})$$

wobei $\mathrm{h.c.}$ für hermitesch konjugiertes steht, da der Lagrangian ja reell sein muss. Das Superpotential hat für renormierbare Theorien die Form

$$W(\Phi) = \tfrac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \tfrac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\,,$$

wobei im allgemeinen die Massenterme m_{ij} und die Kopplungen λ_{ijk} reell und symmetrisch in den Indices sind. Ausgeschrieben in Komponenten ist die Lagrange-Dichte damit

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi_i^\dagger\partial^\mu\phi_i + \mathrm{i}\bar\psi_i\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_i + F_i^\dagger F_i + (m_{ij}\phi_i F_j - \tfrac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\phi_i\phi_j F_k - \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\phi_k + \mathrm{h.c.})\,.$$

ÜBUNG. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen zu dieser Lagrange-Dichte. Sie sollten das folgende Ergebnis erhalten:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\partial^\mu\phi_i &= m_{ij}F_j^\dagger + 2\lambda_{ijk}\phi_j^\dagger F_k^\dagger - \lambda_{ijk}\bar\psi_j\bar\psi_k\,,\\
\mathrm{i}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_i &= m_{ij}\bar\psi_j + 2\lambda_{ijk}\bar\psi_j\phi_k^\dagger\,,\\
F_i^\dagger &= -m_{ij}\phi_j - \lambda_{ijk}\phi_j\phi_k \;=\; -\frac{\partial W(\Phi=\phi)}{\partial\phi_i}\,.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $F_i^\dagger$ ein reines Hilfsfeld, da seine Bewegungsgleichung rein algebraisch ist. Dieses Feld propagiert also nicht, es kann daher eliminiert werden. Rechnen Sie nach, dass damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \partial_\mu\phi_i^\dagger\partial^\mu\phi_i + \mathrm{i}\bar\psi_i\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_i - F_i^\dagger F_i - (\tfrac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\phi_k + \mathrm{h.c.})\\
&= \partial_\mu\phi_i^\dagger\partial^\mu\phi_i + \mathrm{i}\bar\psi_i\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_i - |m_{ij}\phi_j + \lambda_{ijk}\phi_j\phi_k|^2 - (\tfrac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\phi_k + \mathrm{h.c.})
\end{aligned}$$

ist. Nutzen Sie die Bewegungsgleichungen aus, um die Lagrange-Dichte für konstante Felder anzugeben. Dies ergibt das *effektive Potential* der Theorie, $-V_{eff}$. Da konstante Felder verschwindende Ableitungen haben, ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen algebraische Bedingungen an die Felder, die beachtet werden müssen. Sie sollten damit das folgende Resultat erhalten:

$$V_{eff} = F_i^\dagger F_i = |F_i|^2 \,.$$

Vektor-Superfelder. An allgemeine Superfelder kann man eine andere Bedingung stellen, nämlich dass sie reell sein sollen, $\Phi^\dagger = \Phi$. Solche Felder heißen Vektorfelder. Man gibt sie meist in der folgenden Form an, wobei die skalaren Komponentenfelder C, M, N, D sowie das Vektorfeld A_μ sämtlich reell und χ, λ Weyl-Spinorfelder sind:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar\theta) &= C(x) + \mathrm{i}\theta\chi(x) - \mathrm{i}\bar\theta\bar\chi(x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\theta\theta(M(x)+\mathrm{i}N(x)) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\bar\theta\bar\theta(M(x)-\mathrm{i}N(x)) + \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(x) \\ &\quad + \mathrm{i}\theta\theta\bar\theta(\bar\lambda(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi(x)) - \mathrm{i}\bar\theta\bar\theta\theta(\lambda(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\bar\chi(x)) + \tfrac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta(D(x) - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C(x)) \,. \end{aligned}$$

ÜBUNG. Berechnen Sie die Variationen der Komponenten des Vektorfeldes unter $\delta = -\mathrm{i}(\varepsilon Q + \bar\varepsilon\bar Q)$. Zeigen Sie somit, dass

$$\begin{aligned} \delta C &= \mathrm{i}(\varepsilon\chi - \bar\varepsilon\bar\chi) \,, \\ \delta\lambda_\alpha &= \mathrm{i}D\varepsilon_\alpha + \tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu)_\alpha{}^\beta\varepsilon_\beta \,, \\ \delta A^\mu &= -\mathrm{i}(\varepsilon\sigma^\mu\bar\lambda - \lambda\sigma^\mu\bar\varepsilon) - \partial^\mu(\varepsilon\chi + \bar\varepsilon\bar\chi) \,, \\ \delta D &= \partial_\mu(\lambda\sigma^\mu\bar\varepsilon + \varepsilon\sigma^\mu\bar\lambda) \,, \\ \delta F^{\mu\nu} &= -\mathrm{i}\partial^\mu(\varepsilon\sigma^\nu\bar\lambda - \lambda\sigma^\nu\bar\varepsilon) + \mathrm{i}\partial^\nu(\varepsilon\sigma^\mu\bar\lambda - \lambda\sigma^\mu\bar\varepsilon) \,. \end{aligned}$$

Hierbei ist die Feldstärke wie üblich definiert als $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Offenbar formen also die Komponentenfelder $\lambda, \bar\lambda, D$ und $F_{\mu\nu}$ eine (irreduzible) geschlossene Unterdarstellung der Superalgebra. Weiter beachtenswert ist, dass die Variation von D eine totale Divergenz ist. Im Vektorfeld tritt D zusammen mit einer totalen Divergenz auf. Damit ist der D-Term des Vektorfeldes immer automatisch invariant unter susy Transformationen.

Chiral versus Vektor. Da Vektorsuperfelder lediglich reell sein müssen, kann man sehr leicht eines aus einem chiralen Feld Λ und seinem konjugiertem $\Lambda^\dagger$ bilden. Das Feld

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(\Lambda - \Lambda^\dagger) &= \mathrm{i}(\phi - \phi^\dagger) + \mathrm{i}\sqrt{2}(\theta\psi - \bar\theta\bar\psi) + \mathrm{i}\theta\theta F - \mathrm{i}\bar\theta\bar\theta F^\dagger \\ &\quad + \theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu(\phi + \phi^\dagger) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{i}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\partial_\mu\partial^\mu(\phi - \phi^\dagger) \end{aligned}$$

ist offensichtlich ein Vektorfeld. Durch Vergleich der Komponenten finden wir, dass die Transformation $V \mapsto V' = V + \mathrm{i}(\Lambda - \Lambda^\dagger)$ uns erlaubt, einige der Komponenten zu ändern bzw. durch geeignete Wahl von Φ auf null zu setzen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} C' &= C + \mathrm{i}(\phi - \phi^\dagger) \,, \\ \chi' &= \chi + \sqrt{2}\psi \,, \\ \tfrac{1}{2}(M' + \mathrm{i}N') &= \tfrac{1}{2}(M + \mathrm{i}N) + F \,, \\ A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu(\phi + \phi^\dagger) \,, \\ \lambda' &= \lambda \,, \\ D' &= D \,. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir λ und D nicht ändern können, und dass die Änderung des Vektorpotentials eine reine Eichung ist. Wess und Zumino haben die oben angegebene Transformation vorgeschlagen, um das Eichprinzip $A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$ supersymmetrisch zu verallgemeinern. In der Tat läßt sich damit eine $U(1)$ eichinvariante supersymmetrische Theorie formulieren. Die Freiheitsgrade C, χ, M, N sind nicht physikalisch relevant, da wir sie mit obiger Prozedur wegeichen können, indem wir $\phi - \phi^\dagger, \psi, F$ geeignet wählen, wobei $f = \phi + \phi^\dagger$ als Eichung des Vektorpotentials immer noch vollkommen frei wählbar bleibt.

Wess-Zumino Eichung. Es ist bequem, Vektorfelder in der sogenannten *Wess-Zumino Eichung* anzugeben, in der die unphysikalischen Freiheitsgrade zu null gesetzt sind. Es hat die einfache Form

$$V_{\mathrm{WZ}}(x,\theta,\bar\theta) = \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(x) + \mathrm{i}\theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x) - \mathrm{i}\bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x) + \tfrac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x) \,.$$

In dieser Eichung hat das Vektorfeld die bemerkenswerte Eigenschaft, dass alle seine Potenzen V_{WZ}^n, $n > 2$, verschwinden, da dort alle Terme mindestens Ordnung θ^3 sind. Damit ist nur noch das Quadrat des Superfeldes interessant, und ergibt sich zu

$$V_{\mathrm{WZ}}^2(x,\theta,\bar\theta) = -(\theta\sigma^\mu\bar\theta)(\bar\theta\bar\sigma^\nu\theta)A_\mu(x)A_\nu(x) = \tfrac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta A^\mu(x)A_\mu(x) \,.$$

Eichinvarianz. Um eine $U(1)$ eichinvariante Theorie zu formulieren, müssen wir Eichfelder (die wir durch Vektorsuperfelder repräsentieren) und Materie (die wir durch chirale Superfelder einbauen) miteinander koppeln. Eine vernünftige Eichtransformation sollte insbesondere den Charakter eines Feldes nicht ändern, also ein Vektorfeld in ein Vektorfeld und ein chirales Feld in ein chirales Feld überführen. Im einfachsten Fall hat der Lagrangian für komplexe chirale Felder $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2)$ nur den kinetischen Term

$$S = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \Phi \,,$$

was offensichtlich unter der *globalen* Phasentransformation $\Phi \mapsto \mathrm{e}^{-2q\mathrm{i}\lambda}\Phi$, $\Phi^\dagger \mapsto \mathrm{e}^{+2q\mathrm{i}\lambda}\Phi^\dagger$ invariant ist. Wir verwenden komplexe chirale Felder, da wir für geladene, massive Teilchen sowohl links- wie rechts-chirale Anteile als auch die seines Anti-Teilchens für eine vollständige Beschreibung benötigen. Versucht man dies nun auf eine *lokale* Eichinvarianz zu verallgemeinern, also die superraum-invariante Phase λ durch ein komplexes chirales Superfeld $\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})$ zu ersetzen, so ergibt sich ein Problem:

$$\Phi^\dagger \Phi \mapsto \Phi^\dagger \Phi \exp(2q\mathrm{i}(\Lambda^\dagger - \Lambda)) \neq \Phi^\dagger \Phi \,.$$

Führt man jedoch nun das Vektorfeld V ein, so kann man das Problem dadurch lösen, dass man den kinetischen Term durch die eichinvariante Form

$$\Phi^\dagger \exp(2qV)\Phi = \Phi^\dagger\Phi + 2q\Phi^\dagger V \Phi + 2q^2 \Phi^\dagger V^2 \Phi + \mathcal{O}(V^3)$$

ersetzt. Wird V in Wess-Zumino Eichung genommen, so tragen nur Potenzen bis zur zweiten Ordnung bei.

Um eine vollständige supersymmetrische Elektrodynamik hinschreiben zu können, benötigen wir auch die Feldstärke und ihre susy Partner. Dazu konstruieren wir ein Feld, das die Komponenten $\lambda, \bar{\lambda}, D$ und $F_{\mu\nu}$ enthält (aus Dimensionsgründen sind das gerade die Terme, die wir erwarten). So ein Feld läßt sich aus V konstruieren, indem wir durch eine ausreichende Anzahl kovarianter Ableitungen V auf gerade diese Komponenten reduzieren.

ÜBUNG. Man zeige, dass $W_\alpha = (\bar{D}\bar{D})D_\alpha V$ und sein konjugiertes $\bar{W}_{\dot{\alpha}} = (DD)\bar{D}_{\dot{\alpha}}V$ folgende Eigenschaften haben, wobei $(DD) = D^\alpha D_\alpha$ und $(\bar{D}\bar{D}) = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}$ definiert ist:

(1) Die Felder sind chiral bzw. anti-chiral, also $\bar{D}_{\dot{\alpha}} W_\beta = 0$ und $D_\alpha \bar{W}_{\dot{\beta}} = 0$. Dazu ist die Beobachtung hilfreich, dass $D_\alpha D_\beta D_\gamma = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\gamma}} = 0$ ist.

(2) Die Felder W_α und $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ sind eichinvariant, d.h. unter $V \mapsto V' = V + \mathrm{i}(\Lambda - \Lambda^\dagger)$ gilt $W'_\alpha = W_\alpha$ und $\bar{W}'_{\dot{\alpha}} = \bar{W}_{\dot{\alpha}}$.

(3) Die Felder erfüllen die Identität $D^\alpha W_\alpha - \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} = 0$.

Der Maxwell-Term. Mit den obigen Resultaten kann der supersymmetrische Maxwell-Term der Wirkung angegeben werden. Zunächst sei das Feld W_α explizit in Komponenten entwickelt, was mit $y^\mu = x^\mu - \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ den Ausdruck

$$W_\alpha(y, \theta) = 4\mathrm{i}\lambda_\alpha(y) - \left[4\delta_\alpha{}^\beta D(y) - 2\mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}(y)\right]\theta_\beta + 4\theta\theta(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$$

liefert. Damit findet man die korrekte susy Verallgemeinerung des Feldstärketerms zu

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Maxwell}} = \tfrac{1}{32}[W^\alpha W_\alpha]_F \;=\; -\tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathrm{i}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - \tfrac{1}{4}F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}D^2 \,.$$

Es tritt hier die *duale Feldstärke* auf, $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, die allerdings eine totale Divergenz ist und daher zu den Bewegungsgleichungen nicht beiträgt. Das Feld λ ist der susy Partner des Photons, das *Photino*.

Massenterme. Wir haben Materie in Form von komplexen chiralen Felder eingeführt. Mit $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2)$ ist der Ausdruch $\Phi^\dagger \exp(2qV)\Phi$ eichinvariant. Analog können wir dies für das Feld $\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - \mathrm{i}\Phi_2)$ durchführen, und für dieses Feld ist $\tilde{\Phi}^\dagger \exp(-2qV)\tilde{\Phi}$ eichinvariant. Wir führen dieses zweite Feld ein, damit wir wie beim Lagrangian für rein chirale Felder einen Masseterm einführen können, nämlich $m(\Phi\tilde{\Phi} + \Phi^\dagger\tilde{\Phi}^\dagger)$. Der vollständige Lagrangian für susy Elektrodynamik mit massiver Materie ist demnach

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ED}} = \tfrac{1}{32}[W^\alpha W_\alpha]_F + [\Phi^\dagger \mathrm{e}^{2qV}\Phi + \tilde{\Phi}^\dagger \mathrm{e}^{-2qV}\tilde{\Phi}]_D + m[\Phi\tilde{\Phi} + \Phi^\dagger\tilde{\Phi}^\dagger]_F \,.$$

Man beachte, dass das Feld W_α von dem Feld V abhängt. Der führende Term der Exponentialfunktionen führt auf den Term $[\Phi^\dagger\Phi + \tilde{\Phi}^\dagger\tilde{\Phi}]_D = [\Phi_1^\dagger\Phi_1 + \Phi_2^\dagger\Phi_2]_D$. Die weiteren Terme aus den Exponentialfunktionen liefern die Kopplung des Vektorfeldes an die chiral Materie. Der Masseterm ist nicht anderes als $m[\Phi\tilde{\Phi} + \Phi^\dagger\tilde{\Phi}^\dagger]F = \frac{1}{2}m[\Phi_1^2 + \Phi_2^2]_F + \mathrm{h.c.}.$

ÜBUNG. Wenn man diesen Lagrangian in seine Komponentenfeldern ausschreiben will, so ist das zwar im Prinzip nicht schwierig, aber in der Praxis sehr mühsam. Wir wollen die Komponentenfelder von Φ mit ϕ, ψ, F bezeichnen, die von $\tilde{\Phi}$ mit $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{F}$. Außerdem wählen wir V in Wess-Zumino Eichung und führen die übliche $U(1)$-eichkovariante Ableitung $\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu$ ein. Zeigen Sie damit, dass z.B.

$$[\Phi^\dagger \mathrm{e}^{2qV}\Phi]_D = (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi) + \mathrm{i}\psi\sigma^\mu{\mathcal{D}_\mu}^\dagger\bar{\psi} + F^\dagger F + \mathrm{i}\sqrt{2}q(\phi^\dagger\psi\lambda - \phi\bar{\psi}\bar{\lambda}) + q\phi^\dagger\phi D\,.$$

Damit und mit der analogen Entwicklung für den $\tilde{\Phi}$-Term erhält man für den Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{ED}} &= (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi) + (\mathcal{D}_\mu\tilde{\phi}^\dagger)(\mathcal{D}^\mu\tilde{\phi}^\dagger)^\dagger + \mathrm{i}\psi\sigma^\mu{\mathcal{D}_\mu}^\dagger\bar{\psi} + \mathrm{i}\tilde{\psi}\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\tilde{\psi}} + F^\dagger F + \tilde{F}^\dagger\tilde{F} \\ &\quad + \mathrm{i}\sqrt{2}q(\phi^\dagger\psi - \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\psi})\lambda + \mathrm{i}\sqrt{2}q(\tilde{\phi}\bar{\tilde{\psi}} - \phi\bar{\psi})\bar{\lambda} + q(\phi^\dagger\phi - \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi})D \\ &+ m(\phi\tilde{F} + \tilde{\phi}F + \phi^\dagger\tilde{F}^\dagger + \tilde{\phi}^\dagger F^\dagger - \psi\tilde{\psi} - \bar{\psi}\bar{\tilde{\psi}}) - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \tfrac{1}{2}D^2\,.\end{aligned}$$

Die Felder F, $\tilde{F}$ und D sind wieder reine Hilfsfelder, da ihre Bewegungsgleichungen keine Ableitungen enthalten:

$$F + m\tilde{\phi}^\dagger = \tilde{F} + m\phi^\dagger = 0\,, \qquad D + q(\phi^\dagger\phi - \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi}) = 0\,.$$

Eliminiert man diese Felder, läßst sich der Lagrangian auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{ED}} &= (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi + ({\mathcal{D}_\mu}^\dagger\tilde{\phi})(\mathcal{D}^\mu\tilde{\phi}^\dagger) - m^2\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} \\ &\quad + \mathrm{i}\psi\sigma^\mu{\mathcal{D}_\mu}^\dagger\bar{\psi} + \mathrm{i}\tilde{\psi}\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\tilde{\psi}} - m\psi\tilde{\psi} - m\bar{\psi}\bar{\tilde{\psi}} \\ &\quad + \mathrm{i}\sqrt{2}q(\phi^\dagger\psi - \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\psi})\lambda + \mathrm{i}\sqrt{2}q(\tilde{\phi}\bar{\tilde{\psi}} - \phi\bar{\psi})\bar{\lambda} - \tfrac{1}{2}q^2(\phi^\dagger\phi - \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi})^2 - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}\,.\end{aligned}$$

Man sieht also, dass das Photon sowohl an die geladene fermionische Materie, als auch an die geladenen skalaren Superpartner der Materie koppelt. Das Photino hingegen koppelt die fermionischen Materiefelder an ihre Bose-Partner auf ein universelle Weise, so dass insgesamt Supersymmetrie gilt.

Genauer kann man folgendes aus dem Lagrangian ablesen, wenn man die eich-kovarianten Ableitungen ausmultipliziert. Das Photon bildet mit der fermionischen Materie die wohlbekannten 3-Vertices mit einer Photonem-Linie und zwei Fermionen-Linien. Mit den skalaren Superpartnern der fermionischen Materie hingegen kann das Photon nicht nur im analogen 3-Vertex wechselwirken, sondern auch in einem 4-Vertex mit je zwei Photonen- und Skalaren-Linien. Die Wechselwirkungen mit 4-Vertices sind von der Ordnung q^2, während die an 3-Vertices von der Ordnung q sind. Als 4-Vertices gibt es auch noch die Selbstwechselwirkung der skalaren Supermaterie. Das Photino tritt nur in einer Form von 3-Vertices auf, nämlich zusammen mit einer fermionschen Materie-Linie und einer skalaren Supermaterie-Linie. Nach übersetzen der Weyl-Spinoren in gewöhnliche Vier-Spinoren, wobei das Photino ein Majorana-Spinor und der Materie-Spinor ein Dirac-Spinor wird,

$$\Lambda_{M,\mathrm{photino}} = \begin{pmatrix}\lambda_\alpha \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\,, \qquad \Psi_{D,\mathrm{matter}} = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \bar{\tilde{\psi}}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\,,$$

kann man die Feynmann-Regeln für die Vertices sofort ablesen von

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{ED}} &= \mathrm{i}\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi + (\mathcal{D}_\mu\tilde{\phi}^\dagger)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\tilde{\phi}^\dagger) - m^2\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} - \tfrac{1}{2}q^2(\phi^\dagger\phi - \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi})^2 \\ &\quad + q\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\Lambda}\mathrm{i}\Psi(\phi^\dagger + \tilde{\phi}) + \bar{\Lambda}\mathrm{i}\gamma^5\Psi(\tilde{\phi} - \phi^\dagger) - \bar{\Psi}\mathrm{i}\Lambda(\phi + \tilde{\phi}^\dagger) + \bar{\Psi}\mathrm{i}\gamma^5\Lambda(\tilde{\phi}^\dagger - \phi)\right) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\bar{\Lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda\,.\end{aligned}$$

Fayet-Iliopoulos-Term. Die obigen Resultate lassen sich im Prinzip relativ einfach auf nicht-abelsche Eichgruppen verallgemeinern. Allerdings gibt es eine Besonderheit, die nur im abelschen Fall auftritt. Da der Eichterm eines Vektorfeldes V von der Form $\mathrm{i}(\Lambda - \Lambda^\dagger)$ ist, also aus einem rein chiralen und einem rein anti-chiralen Anteil besteht, Vektorfelder aber immer über den ganzen Superraum integriert werden, liefert der Eichterm nach Integration über $\mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar{\theta}$ nur Oberflächenterme für die verbleibende d^4x Integration. Man kann daher zur Wirkung $S_{\mathrm{ED}} = \int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\mathrm{ED}}$ immer einen Term

$$S_{\mathrm{FI}} = \kappa\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar{\theta}V$$

hinzuaddieren, wobei κ eine Konstante ist. Diese Term ist also eichinvariant, führt aber eine spontane Symmetriebrechung der Supersymmetrie herbei, wenn er zur Wirkung hinzugenommen wird. In nicht-abelschen Eichtheorien kann dieser Term nur für den abelschen Anteil der Eichgruppe hinzuaddiert werden.