EICHINVARIANZ IM NICHT-ABELSCHEN FALL

In der Vorlesung wurde skizzenhaft angedeutet, wie eine global supersymmetrische Theorie invariant unter nicht-abelschen Eichgruppen gemacht werden kann. Die Eichgruppe sei G mit Lie-Algbera $\mathfrak{g}$. Die Generatoren der Lie-Algebra seien X^a, $a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$. Unsere übliche Vorstellung von Materie auf einem "fundamentalen" Level ist die, dass deren elementaren Bausteine in irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppen transformieren. Es bezeichne ρ_λ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf einem Vektorraum V_λ zu einem Höchstgewicht λ. Wir gehen hierbei davon aus, dass die Lie-Gruppe halb-einfach ist, so dass die irreduziblen Darstellungen in der Tat Höchstgewichtsdarstellungen sind. Wir bezeichnen abkürzend $t^a = \rho_\lambda(X^a)$. Wir erwarten nun, dass im susy Fall, wo wir Materie durch chirale Felder beschreiben, diese unter Eichtransformationen gemäß

$$\Phi \mapsto \Phi' = \exp(-2\mathrm{i}g\,\Lambda_a t^a)\Phi\,, \qquad \Phi^\dagger \mapsto \Phi^{\dagger\prime} = \Phi^\dagger \exp(2\mathrm{i}g\,\Lambda_a^\dagger t^a)$$

transformieren. Hierbei ist der Faktor 2 reine Konvention, g ein Kopplungsparameter, und Λ_a sind chirale Superfelder. Das Feld Φ ist natürlich ein Vektor im Raum V_λ, und die t^a sind i.a. hermitesche Matrizen, die die irreduzible Darstellung aufspannen, zu der Φ gehört. Es gilt also $[t^a, t^b] = \mathrm{i}f^{ab}{}_c t^c$. In Komponenten ist demnach $\Phi'^k = (\exp(-2\mathrm{i}g\,\Lambda_a t^a))^j{}_k \Phi^k$ und $(t^a)^j{}_k = (\rho_\lambda(X^a))^j{}_k$ sind die Matrixelemente der Darstellungsmatrizen t^a der Generatoren X^a.

Auf ganz ähnliche Weise kann man Eichkovarianz auch für Vektorfelder einführen. Da diese im allgemeinen die Wechselwirkung vermitteln sollten, die durch die Eichgruppe beschrieben wird, transformieren die Vektorfelder in der adjungierten Darstellung. Analog zum abelschen Fall, wo wir die Form des Vektorfeldes durch addieren eines geeignet gewählten Ausdrucks aus chiralen Feldern vereinfachen und gleichzeitig eine $U(1)$ Eichung der Komponente des Vektorpotentials vornehmen können, setzen wir auch hier die Eichtransformation in der Form

$$\exp(2gV_a'T^a) = \exp(-\mathrm{i}2g\Lambda_a^\dagger T^a)\exp(2gV_aT^a)\exp(\mathrm{i}2g\Lambda_aT^a)$$

an. Die Generatoren $T^a = \mathrm{ad}(X^a)$ sind in der adjungierten Darstellung, $(T^a)_b{}^c = f_{ab}{}^c$.

Damit läßt sich ein eichinvarianter Ausdruck angeben, der den alten Ausdruck für die kinetische Energie ersetzt, nämlich

$$\Phi^\dagger \rho_\lambda(\exp(2gT^aV_a))\,\Phi\,.$$

In der Tat ergibt sich unter einer Eichtransformation

$$\begin{aligned}(\Phi^\dagger\rho_\lambda(\exp(2gT^aV_a))\,\Phi)' &= \Phi^\dagger\exp(2\mathrm{i}gt^a\Lambda_a^\dagger)\,\rho_\lambda(\exp(-\mathrm{i}2g\Lambda_a^\dagger T^a)\exp(2gV_aT^a)\exp(\mathrm{i}2g\Lambda_aT^a))\,\exp(-2\mathrm{i}gt^a\Lambda_a)\Phi\\ &= \Phi^\dagger\rho_\lambda(\exp(2gT^aV_a))\,\Phi\,,\end{aligned}$$

da Darstellungen Gruppen- bzw. Algebren-Homomorphismen sind. Es gilt also insbesondere $\rho_\lambda(\exp(2g\,T^aV_a)) = \exp(2g\,t^aV_a)$ und in Komponenten liest sich der eichinvariante kinetische Term als $\Phi_j^\dagger(\exp(2g\,t^aV_a))^j{}_k\Phi^k$.

Infinitesimale Transformationen. Im folgenden verwenden wir die Abkürzungen $\Lambda = 2g\,t^a\Lambda_a$ und $V = 2g\,t^aV_a$. Die konkrete Darstellung $t^a = \rho_\lambda(X^a)$ sei fest gewählt und wird von nun an nicht mehr explizit notiert. Infinitesimale Transformationen sind solche, für die wir nur Terme linear in Λ berücksichtigen müssen. Damit ergibt sich zum Beispiel für

$$\exp(V') - \exp(V) = \delta V + \tfrac{1}{2}(\delta V\,V + V\,\delta V) + \tfrac{1}{6}(\delta V\,V^2 + V\,\delta V\,V + V^2\,\delta V) + \ldots$$

mit $\delta V = V' - V$, wenn wir die Transformation mit infinitesimalem Λ einsetzen,

$$\exp(-\mathrm{i}\Lambda^\dagger)\exp(V)\exp(\mathrm{i}\Lambda) - \exp(V) = \mathrm{i}(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \mathrm{i}(V\Lambda - \Lambda^\dagger V) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}(V^2\Lambda - \Lambda^\dagger V^2) + \ldots$$

Das kann man nun nach δV auflösen, und erhält den Beginn einer Störungsreihe,

$$\delta V = \mathrm{i}(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}[V, \Lambda + \Lambda^\dagger] + \tfrac{1}{12}\mathrm{i}[V, [V, \Lambda - \Lambda^\dagger]] + \ldots$$

Bei diesen Rechnungen muss man natürlich die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel verwenden. Für die einzelnen Komponenten des Superfeldes ergibt dies für den Fall der adjungierten Darstellung

$$V_a' - V_a = \mathrm{i}(\Lambda_a - \Lambda_a^\dagger) - gf_a{}^{bc}V_b(\Lambda_c + \Lambda_c^\dagger) - \tfrac{1}{3}\mathrm{i}g^2 f_a{}^{bc}f_c{}^{de}V_bV_d(\Lambda_e - \Lambda_e^\dagger) + \ldots$$

In der Tat liefern die ersten beiden Terme die übliche Eichtransformation eines nicht-abelschen Vektorpotentials. Es bezeichne φ_a den führenden skalaren Term des chiralen Feldes Λ_a. Dann gilt für das Vektorpotential

$$V_\mu'^a = V_\mu^a + \partial_\mu(\varphi^a + \varphi^{a\dagger}) + gf^a{}_{bc}(\varphi^b + \varphi^{b\dagger})V_\mu^c\,,$$

wobei wir den Gruppenindex jetzt der besseren Übersichtlichkeit halber nach oben geschrieben haben.

Wess-Zumino-Eichung. Natürlich arbeitet man gerne in der Wess-Zumino-Eichung für Vektor-Superfelder. Allerdings zerstört eine Eichung mit einem beliebigen chiralen Feld Λ^a die Wess-Zumino-Eichung, d.h., V'^a ist nicht länger in dieser Eichung. Allerdings kann man V'^a durch eine Supersymmetrie-Transformation wieder in Wess-Zumino-Eichung bringen. Ohne dass man das extra angibt, wollen wir im folgenden davon ausgehen, dass auch V'^a wieder in Wess-Zumino-Eichung gebracht worden ist, so dass keine Terme auftreten können, die kubisch oder höherer Ordnung in V sind, also $V'^a V'^b V'^c = 0$. Wählt man nun Λ so, dass auch $V^a V^b \Lambda^c = 0$ ist, dann verschwinden in der Transformation des Vektorpotentials alle Terme dritter oder höherer Ordnung, und wir erhalten für Wess-Zumino-geeichte Felder

$$\delta V_{\rm WZ} = {\rm i}(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \tfrac{1}{2}{\rm i}[V_{\rm WZ}, \Lambda + \Lambda^\dagger]\,.$$

Kovariante Ableitungen. Um eine susy Variante einer nicht-abelschen Feldstärke konstruieren zu können, benötigen wir Ableitungen, die sowohl supersymmetrisch kovariant als auch eichkovariant sind. Solche Ableitungen ∇_A, $A = \mu, \alpha, \dot\alpha$, haben dann die Eigenschaft, dass sie mit der Eichung vertauschen, $(\nabla_A\Phi)' = \exp(-{\rm i}\Lambda)(\nabla_A\Phi)$. Offensichtlich erfüllt ∇_A diese Eigenschaft, wenn $\nabla'_A = \exp(-{\rm i}\Lambda)\nabla_A\exp({\rm i}\Lambda)$ gilt. Man beachte, dass die kovariante Ableitung abhängig von der Wahl der Darstellung ist! Das muss auch so sein, weil sie ja auf ein chirales Feld angewandt wird, das in der Darstellung ρ_λ transformiert. Wir können nun ausnutzen, dass Λ ein chirales Feld ist. Damit haben wir $\bar D_{\dot\alpha}\Lambda = 0 = D_\alpha\Lambda^\dagger$. Die einfache Wahl $\nabla_{\dot\alpha} = \bar D_{\dot\alpha}$ ergibt dann natürlich $\nabla'_{\dot\alpha} = \nabla_{\dot\alpha}$. Wenn wir nun $\nabla_\alpha = \exp(-V)D_\alpha\exp(V)$ wählen, wobei V wieder in der korrekten Darstellung zu nehmen ist, finden wir

$$\nabla'_\alpha = \exp(-V')D_\alpha\exp(V') = \exp(-{\rm i}\Lambda)\nabla_\alpha\exp({\rm i}\Lambda)\,,$$

wie wir es wollen. Dieses Ergebnis folgt, wenn man einfach die oben beschriebene Eichtransformation für das Vektor-Superfeld einsetzt. Die verbleibende kovariante Ableitung ∇_μ läßt sich dann aus der susy Algebra bestimmen, nämlich via

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_{\dot\alpha}\} = 2{\rm i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\nabla_\mu\,,$$

was aber eine längere Rechnung nach sich zieht. In der oben angegebenen Form für ∇_α wirkt die susy kovariante Ableitung D_α sowohl auf das nachstehende $\exp(V)$, als auch auf alles, worauf ∇_α angewandt wird. Dies läßt sich leicht umformen zu $\nabla_\alpha = D_\alpha + \exp(-V)\,(D_\alpha\exp(V))$. In dieser Schreibweise wird klar, dass der zweite Term einem supersymmetrischen Eichzusammenhang entspricht, $\Gamma_\alpha = {\rm i}\exp(-V)\,(D_\alpha\exp(V))$. Dieser Zusammenhang transformiert unter Eichungen gemäß

$$\Gamma'_\alpha = {\rm i}\exp(-V')\,(D_\alpha\exp(V')) = \exp(-{\rm i}\Lambda)\Gamma_\alpha\exp({\rm i}\Lambda) + {\rm i}\exp(-{\rm i}\Lambda)\,(D_\alpha\exp({\rm i}\Lambda))\ .$$

Man beachte, dass im abelschen Fall der Zusammenhang nichts anderes ist als $\Gamma_\alpha = 2{\rm i}\,gD_\alpha V$. Vergleicht man, wie wir in der Vorlesung die susy Feldstärke einer abelschen susy Eichtheorie eingeführt haben, so liegt es nahe, auch im nicht-abelschen Fall den Ansatz

$$W_\alpha = (2{\rm i}g)^{-1}\bar D^2\Gamma_\alpha = (2{\rm i}g)^{-1}\bar D^2\exp(-V)\,(D_\alpha)\exp(V))$$

zu machen. Diese Feldstärke transformiert in der Tat kovariant, da der inhomogene Term in der Transformation zu Γ'_α unter der Wirkung von $\bar D^2$ wegfällt, da Λ chiral ist. In der Wess-Zumino-Eichung ist der Eichzusammenhang recht einfach. Entwickelt man nämlich den Ausdruck in Potenzen von V, so überleben nur die ersten beiden Terme,

$$-{\rm i}\Gamma_\alpha = D_\alpha V + \tfrac{1}{2}[D-\alpha V, V]\,.$$

Für die Komponenten der Feldstärke ergibt dies:

$$W^a_\alpha = \bar D^2 D_\alpha V^a + {\rm i}\,g\,f^a{}_{bc}\bar D^2(D_\alpha V^b)V^c\,,$$

wobei der zweite Term gerade die gewöhnliche Ableitung in eine eichkovariante Ableitung umwandelt. Entwickeln wir dieses Feld in seine susy Komponenten, so finden wir mit der in der Vorlesung eingeführten Notation für chirale Felder

$$W^a_\alpha(y) = 4{\rm i}\lambda^a_\alpha + \left(4\delta_\alpha{}^\beta D^a(y) + 2{\rm i}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu)_\alpha{}^\beta F^a_{\mu\nu}(y)\right)\theta_\beta + 4\theta^2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_\mu\bar\lambda^{a\dot\alpha}(y)\,,$$

wobei die Komponenten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\,f^a{}_{bc}A^b_\mu A^c_\nu\,,\\ \mathcal{D}_\mu\bar\lambda^{a\dot\alpha} &= \partial_\mu\bar\lambda^{a\dot\alpha} - g\,f^a{}_{bc}A^b_\mu\bar\lambda^{c\dot\alpha}\,. \end{aligned}$$

Wirkungen. Damit haben wir alles zusammen, um den (reinen) eichinvarianten und supersymmetrischen Anteil einer Lagrange-Dichte, der durch die Feldstärke gegeben ist, anzugeben, und zwar in der Wess-Zumino-Eichung:

$$\mathcal{L}_V = \tfrac{1}{64}\left[(W^{a\alpha}W_{a\alpha}) + (W^a{}_\alpha{}^\dagger W_a{}^{\alpha\dagger})\right]_F \ = \ -\tfrac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + {\rm i}\lambda^a\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar\lambda_a + \tfrac{1}{2}D^aD_a\,.$$

Man verwende ein wenig Sorgfalt darauf, die diversen Indizes und deren Bedeutung auseinander zu halten. Auf analoge Weise kann man die Lagrange-Dichte für Multiplets chiraler Materie angeben. Der Unterschied zum abelschen Fall ist lediglich der, dass man überall die korrekten, nicht-abelschen Versionen der eichkovarianten Ableitungen einsetzen muss:

$$\mathcal{L}_\Phi = \left[\Phi^\dagger \exp(V)\Phi\right]_D \;=\; (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi) + \mathrm{i}\psi\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu^\dagger\bar{\psi} + F^\dagger F + \mathrm{i}\sqrt{2}g(\phi^\dagger t^a\lambda_a\psi - \bar{\psi}t^a\bar{\lambda}_a\phi) + g\phi^\dagger t^a D_a\phi\,,$$

wobei wie zu erwarten $\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi + \mathrm{i}g\,t^a A_{a\mu}\phi$ ist.

In realistischen physikalischen Theorien habt man im allgemeinen mehr als ein chirales Multiplet. Die Verschiedenen Multiplets $\Phi^{(i)}$ transformieren dabei möglicherweise in verschiedenen Darstellungen $\rho_{\lambda^{(i)}}$ der Eichgruppe G. Natürlich müssen wir dann für die Matrix V diejenige einsetzen, die sich durch Konstruktion in der Darstellung $t^{(i)a} = \rho_{\lambda^{(i)}}(X^a)$ der Generatoren ergibt. Wir erhalten dann für jedes solche Multiplet einen Beitrag $\mathcal{L}_{\Phi^{(i)}}$. Hinzu kommt dann noch ein weiterer Term zur vollständigen Lagrange-Dichte, nämlich die Wechselwirkung, die durch das Superpotential beschrieben wird. Der Wechselwirkungsterm hat die Form

$$\mathcal{L}_{\mathrm{imt}} = \Big[W(\{\Phi^{(i)}\}) * \mathrm{h.c.}\Big]_F\,,$$

und muss unter der Wirkung der Eichgruppe G invariant sein. Für renormierbare Theorien kann ferner W höchstens kubisch in den Superfeldern $\Phi^{(i)}$ sein. Die Hilfsfelder lassen sich wie gewohnt eleminieren,

$$\begin{aligned} F^{(i)\dagger} &= -\frac{\partial W}{\partial\phi^{(i)}}\,, \\ D^a &= -\sum_i g\,\phi^{(i)\dagger}\rho_{\lambda^{(i)}}(X^a)\phi^{(i)}\,. \end{aligned}$$

Das tree-level effektive Potential hat dann die Form

$$V_{\mathrm{eff}}(\{\phi^{(i)}\}) = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial\phi^{(i)}}\right|^2 + \tfrac{1}{2}g^2\sum_a\left(\sum_i \phi^{(i)\dagger}\rho_{\lambda^{(i)}}(X^a)\phi^{(i)}\right)^2\,.$$

Susy QCD. Als einfachstes Beispiel betrachten wir supersymmetrische QCD mit nur einer Geschmacksrichtung an Quark(s). Wie im abelschen Fall benötigen wir für ein massives geladenes Teilchen und sein Antiteilchen *zwei* chirale Supermultiplets, Φ_S und Φ_T für die links-chiralen Komponenten des Quark- bzw. Antiquark-Feldes. Die hermitesch konjugierten Superfelder beschreiben dann die rechts-chiralen Komponenten. Die Quarks transformieren in der **3** irrep von $SU(3)$, und die entsprechenden Darstellungsmatrizen der Generatoren seien $\rho_{\mathbf{3}}(X^a) = t^a$. Die Antiquarks transformieren dann in der $\bar{\mathbf{3}}$ irrep, deren Darstellungsmartizen die $t^{a*} = \rho_{\bar{\mathbf{3}}}(X^a)$ sind. Also:

$$\Phi_S \mapsto \Phi_S' = \exp(-2\mathrm{i}gt^a\Lambda_a)\Phi_S\,, \quad \Phi_T \mapsto \Phi_T' = \exp(+2\mathrm{i}gt^{a*}\Lambda_a)\Phi_T\,.$$

Damit folgt, dass der transponierte Vektor $(\Phi_T)^t$ gemäß $(\Phi_T)^t \mapsto (\Phi_T)^t\exp(2\mathrm{i}gt^a\Lambda_a)$ transformiert. Als einfachstes Superpotential bietet sich daher $W(\Phi_S,\Phi_T) = -m(\Phi_T)^t\Phi_S$ an, was per constructionem $SU(3)$-invariant ist.

Für das effektive Potential auf tree-level, wenn man die Theorie um den Fall konstanter Felder entwickelt, findet man damit

$$V(\phi_S,\phi_T) = m^2(\phi_S^\dagger\phi_S + \phi_T^\dagger\phi_T) + \tfrac{1}{2}g^2(\phi_S^\dagger t^a\phi_S - \phi_T^\dagger t^{a*}\phi_T)^2\,,$$

wobei g die QCD Kopplungskonstante bezeichnet. Das effektive Potential enthält nur die skalaren Komponenten der chiralen Felder. Den vollen Lagrangian drückt man meist in 4er-Spinoren aus, also in Termen des Dirac-Spinorfeldes Ψ_D für das Quark und des Majorana-Spinorfeld Λ_M^a für das Gaugino. So erhält man bereits in diesem allereinfachsten Fall einen ziemlich länglichen Ausdruck für den Lagrangian in den Komponeten, nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\;& \mathrm{i}\bar{\Psi}_D\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi_D - m\bar{\Psi}_D\Psi_D + (\mathcal{D}^\mu\phi_S)^\dagger(\mathcal{D}_\mu\phi_S) - m^2\phi_S^\dagger\phi_S + (\mathcal{D}^\mu\phi_T^*)^\dagger(\mathcal{D}_\mu\phi_T^*) - m^2\phi_T^\dagger\phi_T \\ & - \tfrac{1}{2}g^2(\phi_S^\dagger t^a\phi_S - \phi_T^t t^a\phi_T^*)^2 \\ +\;& \tfrac{1}{\sqrt{2}}g\sum_a[\bar{\Lambda}_M^a(\phi_S^\dagger + \phi_T^t)t^a\Psi_D + \bar{\Lambda}_M^a(\phi_T^t - \phi_S^\dagger)\mathrm{i}\gamma_5 t^a\Psi_D - \bar{\Psi}_D t^a(\phi_S + \phi_T^*)\Lambda_M^a + \bar{\Psi}_D t^a(\phi_T^* - \phi_S)\mathrm{i}\gamma_5\Lambda_M^a] \\ -\;& \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sum_a\bar{\Lambda}_M^a\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Lambda_M^a\,, \end{aligned}$$

wobei die susy- und eich-kovarianten Ableitungen gegeben sind durch $\mathcal{D}_\mu\phi_S = \partial_\mu\phi_S + \mathrm{i}gt^a A_{a\mu}\phi_S$, sowie $\mathcal{D}_\mu\Lambda_M^a = \partial_\mu\Lambda_M^a - gf^a{}_{bc}A_\mu^b\Lambda_M^c$ etc.

Susy elektroschwache Theorie. Ein weiteres Beispiel, das man als Vorbereitung für ein supersymmetrisch erweitertes Standardmodell sehen kann, ist eine susy Version der elektroschwachen $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Eichtheorie. Die entscheidende Komplikation hierbei ist die Konstruktion einer susy Version des nicht-abelschen Higgs-Mechanisnus, die wir benötigen, um die Eichinvarianz zu brechen und den Teilchen Masse zu geben. Wir müssen also zum einen chirale Superfelder für jede chirale Komponente der bekannten Fermionen einführen, zum anderen aber müssen wir auch die Felder der elektroschwachen Higgs-Skalare chiralen Superfeldern zuweisen.

Man könnte nun auf die Idee kommen, die Higgs-Skalare in die *selben* Superfelder zu stecken, der wir auch für einige der bekannten Fermionen verwenden. Es sei z.B. $\Phi(E_L)$ ein chirales Supermultiplet, das zum einen das Elektron-Doublet (ν_{eL}, e_L) enthält, zum anderen aber auch eine skalare Doubletn-Komponente mit den gleichen elektrischen Ladungen, $(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$. Diese skalare Komponente könnte man nun versucht sein, zur Generierung von Masse für die down-artigen Quarks und geladenen Leptonen zu verwenden. In einer nicht-supersymmetrischen Theorie erhalten die up-artigen Quarks ihre Masse, indem man das ladungskonjugierte Doublet $(-\tilde{e}^c_L, \tilde{\nu}^c_{eL})$ verwendet. In einer supersymmetrischen Theorie ist dieses ladungskonjugierte Doublet jedoch mit den *rechts*-chiralen Antiteilchen $(-e^c_R, \nu^c_{eR})$ verknüpft, das in $\Phi^\dagger(E_L)$ auftritt. Daher kann es nicht im Superpotential $W(\Phi^{(i)})$ auftreten, da letzteres vollständig aus links-chiralen Superfeldern konstruiert werden muss. Um also den up-artigen Quarks eine Masse geben zu können, müssen wir ein neues links-chirales Supermultiplet einführen, $\Phi(H_1)$, das Isospin $I = \frac{1}{2}$ und Hyperladung $Y = \frac{1}{2}$ besitzt. Es enthält ein skalares Doublet (H_1^+, H_1^0), allerdings auch ein geladenes chirales Fermion. Man muss diesem neuen Fermion eine Dirac-Masse geben, da eine Majorana-Masse Ladungserhaltung verletzen würde. In jedem Fall benötigen wir einen Masseterm für das skalare Doublet, um die gewünschte spontane Symmetriebrechung herbeiführen zu können. Die einfachste Lösung ist, ein weiteres chirales Supermultiplet $\Phi(H_2)$ zu fordern, das Isospin $I = \frac{1}{2}$ und Hyperladung $Y = -\frac{1}{2}$ besitzt. Es enthält das skalare Doublet (H_2^0, H_2^-). Dies ergibt einen symmetrische Ansatz, bei dem $\Phi(H_2)$ verwendet wird, um den down-artigen Quarks und den geladenen Leptonen Masse zu geben, $\Phi(H_1)$ hingegen, um den up-artigen Quarks massiv werden zu lassen. In der sogenannten *minimal* supersymmetrisch erweiterten elektroschwachen Theorie hat man also *zwei* chirale Supermultiplets zusätzlich zu denen, die man für die bekannten Materiefelder benötigt.

Experimentell weiß man heute, dass es in der Tat genau drei Generationen von Teilchen gibt. Die entsprechenden drei Doublet Superfelder, die die (links-chiralen) Lepton-Doublets $l = e, \mu, \tau$ enthalten, bezeichen wir mit $L^{(l)}$. Analog bezeichnen wir die Superfelder, in denen die Quark-Doublets sitzen, mit $Q^{(f)}$, $f = 1, 2, 3$, und unterdrücken den Index für die Farbladung, der in der **3** irrep der $SU(3)$ läuft. Die Singelt-Superfelder bezeichnen wir mit l^c, $U^{c(f)}$ und $D^{c(f)}$, wobei die drei möglichen Familien, die der Index f angibt, die Geschmäcker u, c, t für $U^{(f)}$ angibt, und die Geschmäcker d, s, b für $D^{(f)}$. Das hochgestellte $\dot{()}^c$ steht, wie zuvor, für Ladungskonjugation, und wieder ist der Farbladungsindex unterdrückt, der für die ladungskonjugierten Quarks natürlich in der $\bar{\mathbf{3}}$ irrep läuft. Um die Notation weiter knapp zu halten, wollen wir auch die beiden Higgs-Doublets einfach durch H_1 und H_2 abkürzen. Um nun endlich die Massen für die geladenen Leptonen und die Quarks zu erzeugen, benötigen wir Yukawa-Kopplungen, die sich aus dem F-Term eines Superpotentials der Form

$$W = \sum_l m^{(l)} \left[L^{(l)t} (\mathrm{i}\tau_2) H_2 \right] l^c + \sum_{f,f'} m^{(d)}_{ff'} \left[Q^{(f)t} (\mathrm{i}\tau_2) H_2 \right] D^{c(f')} + \sum_{f,f'} m^{(u)}_{ff'} \left[Q^{(f)t} (\mathrm{i}\tau_2) H_1 \right] U^{c(f')} .$$

ergeben. Hierbei sind $m^{(u)}$ und $m^{(d)}$ die Massenmatrizen der up-artigen und down-artigen Quarks, bzw. sind proportional zu diesen. Der Faktor $(\mathrm{i}\tau_2)$ ist nichts anderes als $\varepsilon_{\alpha\beta}$, und wird benötigt, um ein $SU(2)$ Singulet aus zwei Doublets unter der internen Symmetriegruppe zu konstruieren. In den beiden Termen, in denen die Quarks vorkommen, muss man natürlich auch über die Farbladungen summieren.

Die restlichen Anteile der Lagrange-Dichte sind mit dem, was wir bis jetzt gelernt haben, schnell hinzuschreiben. Zunächst benötigen wir Feldstärken für die $SU(2)$ und die $U(1)$ Eichtheorien. Wie solche Feldstärken aussehen, wissen wir bereits:

$$\begin{aligned} W^i_\alpha &= \bar{D}^2 D_\alpha W^i + \mathrm{i}g_{\mathrm{weak}} \varepsilon^{ijk} \bar{D}^2 (D_\alpha W^j) W^k , \quad i \in \{1, 2, 3\} , \\ B_\alpha &= \bar{D}^2 D_\alpha B , \end{aligned}$$

wobei wir für die nicht-abelsche Feldstärke der schwachen Wechselwirkung Wess-Zumino-Eichung verwendet haben und W^i und B Vektorsuperfelder bezeichnen. Damit ergibt sich die supersymmetrische Lagrange-Dichte für den reinen Eichtheorie-Anteil zu

$$\mathcal{L}_V = \frac{1}{64} \left[W^{i\alpha} W_{i\alpha} + W^{i\dagger}_\alpha W^{\alpha\dagger}_i + 2 B^\alpha B_\alpha \right]_F .$$

Zu guter letzt müssen wir noch die Wechselwirkung der Eich-Supermultipletts mit der chiralen Materie und den Higgs-Supermultipletts angeben. Diese ist in ihrer Form allerdings vollständig durch die Quantenzahlen des schwachen Isospins und der Hyperladung der Materiefelder festgelegt. Man findet mit den Notationen von oben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Phi \quad = \quad & \Bigg[\sum_l L^{(l)\dagger} \exp(\mathrm{i}g_{\mathrm{weak}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W} - \mathrm{i}g_{\mathrm{e.m.}}B)L^{(l)} \\
& + \sum_f Q^{(f)\dagger} \exp(\mathrm{i}g_{\mathrm{weak}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W} + \frac{1}{3}\mathrm{i}g_{\mathrm{e.m.}}B)Q^{(f)} \\
& + \sum_f U^{c(f)\dagger} \exp(-\frac{4}{3}\mathrm{i}g_{\mathrm{e.m.}}B)U^{c(f)} + \sum_f D^{c(f)\dagger} \exp(+\frac{2}{3}\mathrm{i}g_{\mathrm{e.m.}}B)D^{c(f)} + \sum_l l^{c\dagger} \exp(+2\mathrm{i}g_{\mathrm{e.m.}}B)l^c \\
& + H_1^\dagger \exp(\mathrm{i}g_{\mathrm{weak}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W} + \mathrm{i}g_{\mathrm{e.m.}}B)H_1 + H_2^\dagger \exp(\mathrm{i}g_{\mathrm{weak}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W} - \mathrm{i}g_{\mathrm{e.m.}}B)H_2\Bigg]_D \quad .
\end{aligned}$$

Es sei als (allerdings längliche) Übungsaufgabe überlassen, die gesamte Lagrange-Dichte hinzuschreiben, in Komponenten-Feldern auszudrücken und die Hilfsfelder zu eliminieren. Man kann allerdings schon an den einzelnen Anteilen der Lagrange-Dichte absehen, dass supersymmetrische vereinheitliche Theorien, wie das supersymmetrisch erweiterte Standardmodell, sehr große Lagrange-Dichten besitzen, die – ausgeschrieben – mehrere Seiten füllen.