VORBEMERKUNGEN

Die Lie-Gruppen $SU(n)$ haben eine sehr einfache Struktur für ihre $n-1$ verschiedenen fundamentalen Darstellungen. Die speziellen unitären Transformationen haben natürlich eine definierende Darstellung auf dem Raum $\mathbb{C}^n$. Die fundamentalen Darstellungen sind nun alles Darstellungen, die durch vollständig antisymmetrische Tensoren gegeben sind. Sie sind daher in natürlicher Weise auf den Räumen $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$, $k = 1, \ldots, n-1$, realisiert. In ähnlicher Weise lassen sich die symmetrischen Tensorprodukte $S^k(\mathbb{C}^n)$ verwenden, um Darstellungen mit vollständig symmetrischen Tensoren zu realisieren. Beide Klassen von Darstellungen genügen dann, um auch allgemeine Tensordarstellungen konstruieren zu können.

Für die orthogonalen Gruppen $SO(n)$ kann man ebenfalls vollständig antisymmetrische Tensordarstellungen mit Hilfe der Räume $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ realisieren. Allerdings gibt es nun zusätzliche Darstellungen, die nicht als Tensoren realisiert werden können. Dies sind die sogenannten Spinor-Darstellungen. Bezüglich $SO(n)$ sind dies nämlich lediglich projektive Darstellungen, die zu gewöhnlichen Darstellungen einer nicht-trivialen Überlagerungsgruppe von $SO(n)$ geliftet werden können. Diese zweifache Überlagerungsgruppen von $SO(n)$ werden *Spin*(n) genannt. Die Tatsache, dass die Spinor-Darstellungen nicht in Form von Tensoren realisiert werden können, ist auf enge Weise damit verbunden, dass ihnen eine weitere algebraische Struktur zugrunde liegt, die der Clifford-Algebren.

Clifford-Algebren. Wir betrachten einen Vektorraum V mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zu diesem inneren Produkt ist in natürlicher Weise eine quadratische Form Q assoziiert, $Q(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Die Clifford-Algebra zu V mit Q kann man sich nun als die äußere Algebra $\bigwedge^* V$ mit einer neuen Multiplikation vorstellen, nämlich mit dem Produkt $v \cdot v = -\langle v, v\rangle 1\!\!1 = -\|v\|^2 1\!\!1$ für alle $v \in V$. Damit ist die Clifford-Algbra $C(V,Q)$ über einen reellen Vektorraum V einfach gegeben als $C(V,Q) = \bigotimes^* V/I(V,Q)$, wobei $\bigotimes^* V$ die Tensor-Algebra $\bigotimes^* V = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \ldots$ ist, und $I(V,Q)$ ist das Ideal in $\bigotimes^* V$, das durch die Relation $v \otimes v + Q(v,v)1\!\!1$ für $v \in V$ aufgespannt wird. Die Tensoralgebra $\bigotimes^* V$ ist in natürlicher Weise $\mathbb{Z}$-graduiert. Da das Ideal $I(V,Q)$ durch quadratische Elemente generiert wird, behält der Quotient $C(V,Q)$ nur eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung, $C(V,Q) = C^{(0)}(V,Q) \oplus C^{(1)}(V,Q)$.

Allgemeine Eigenschaften. Es ist hiflreich, sich ein paar Dinge zu Clifford-Algebren klar zu machen. Die hier gegebene Definition unterscheidet sich leicht von der in der Vorlesung verwendeten, aber man sieht leicht, dass sie äquivalent sind.

- Wenn $Q = 0$, so erhalten wir die Grassmann-Algebra über V, also die ALgbra $\bigwedge^* V = C(V, Q = 0)$.

- Anwenden der Definition de Clifford-Algebra auf eine Summe von Vektoren $v + w$ ergibt $(v+w)\cdot(v+w) = v^2 + v\cdot w + w \cdot v + w^2 = -Q(v+w, v+w) = -Q(v,v) - 2Q(v,w) - Q(w,w)$. Dies impliziert die Relation $v \cdot w + w \cdot v = \{v, w\} = -2Q(v,w)$, die oft zur Definition einer Clifford-Algebra verwendet wird. Ist Q durch ein inneres Produkt induziert, so heißt das insbesondere, dass zwei Vektoren antikommutieren, wenn sie orhtogonal zueinander sind.

- Etwa die Hälfte de Mathematiker verwenden die hier gegebene Definition für Clifford-Algebren, die andere Hälfte verwendet statt dessen die Definition via $v \cdot v = \|v\|^2 1\!\!1$ mit dem anderen Vorzeichen.

- Eine gegebene reelle, nicht-entartete quadratische Form kann immer in die Form η mit Signatur (p,q) gebracht werden, $p + q = n$, $\eta = diag(+1, \ldots, +1, -1, \ldots, -1)$. Für Mathematiker ist der Fall $(p = n, q = 0)$ besonders interessant, für Physiker auch der Fall $(p = n-1, q = 1)$ bzw. $(p = 1, q = n-1)$. Betrachtet man eine komplexe statt reelle quadratische Form, so gibt es, bis auf Isomorphismen, natürlich nur eine Form der Signatur $(n, 0)$.

- Im Falle von $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt wird die Clifford-Algebra auch einfach $C(n)$ abgekürzt. Wählt man in V eine Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots e_n\}$, so ist die Algebra erzeugt durch die e_i mit der Relation $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$.

- Als Vektorräume sind die Algebren $C(n)$ und $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$ isomorph. Dies sieht man leicht ein, weil man jedes Wort $e_{i_1} e_{i_2} \ldots$ mit Hilfe der Relation in ein Wort umwandeln kann, indem kein Buchstabe e_i dopplet auftritt, und die Buchstaben geordent sind, d.h., $i_1 < i_2 < \ldots$. Dies geht, weil $e_i^2 = -1$, und ansonsten $e_i e_j = -e_j e_i$ für $j \neq i$. Daher ist die Dimension von $C(n)$ genau wie die von $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$ gerade 2^n. Eine Basis von $C(n)$ ist gegeben durch $1\!\!1$, $\{e_i\}$, $\{e_i e_j : i < j\}$, $\{e_i e_j e_k : i < j < k\}$, $\ldots$, $e_1 e_2 \ldots e_n$.

Die Clifford-Algebren hatten wir in der Vorlesung ausführlich klassifiziert. Wir erinnern nur schnell daran, dass z.B. $C(1)$ einfach die Algebra ist, die durch die zwei Elemente $\{1\!\!1, e_1\}$ generiert wird, wobei $e_1^2 = -1$ gilt. Damit ist offensichtlich $C(1) \cong \mathbb{C}$.

Eine der wichtigesten Eigenschaften der Clifford-Algebren ist, dass sie verwendet werden können, um die Gruppen *Spin*(n) zu konstruieren. Diese sind, wie wir sehen werden, nicht triviale, zweifache Überlagerungen der orthogonalen Gruppen $SO(n)$. Man beachte schon jetzt, dass quadratische Ausdrücke bzw. Worte gerader Länge in den antikommutierenden Generatoren bzw. Buchstaben kommutierende Objekte sind.

Definition. Es gibt mehrere äquivalente Wege, die Gruppen *Spin*(n) als die Gruppen invertierbarer Elemente einer Clifford-Algebra zu definieren. Offensichtlich gibt es invertierbare Elemente in $C(n)$, da zum Beispiel $e_i^{-1} = -\frac{1}{2}e_i$ ist.

• Man kann *Spin*(n) als die Gruppe der invertierbaren Elemente $\tilde{g} \in C^{(0)}(n)$ des geraden Anteils der Clifford-Algebra definieren, die den Raum $V = \mathbb{R}^n$ unter Konjugation invariant lassen, $\tilde{g}V\tilde{g}^{-1} \subset V$.

• Man kann zeigen, dass für $v, w \in V$ die Konjugation $v \mapsto wvw^{-1}$ eine Reflektion (Spiegelung) von v and der Hyperebene darstellt, die auf w senkrecht steht. Man definiert dann zunächst die Gruppe *Pin*(n) als die Gruppe aller solcher Spiegelungen mit $\|w\|^2 = 1$. Die Gruppe *Spin*(n) ist dann die Untergruppe von *Pin*(n) der geraden Elemente, *Spin*(n) $=$ *Pin*$(n) \cap C^{(0)}(n)$. Diese Gruppe enthält offensichtlich $SO(n)$, da jede Rotation (Drehung) durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen realisiert werden kann (Satz von Cartan-Dieudonné).

• Man kann eine Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(n)$ aus den quadratischen Elementen der Clifford-Algebra definieren. Diese Definition ist die expliziteste und einfachste, aber man sieht nicht sofort, dass dadurch die Lie-Algebra einer Überlagerungsgruppe von $SO(n)$ erzeugt wird, wie es in der vorhergenden Definition der Fall ist.

Explizite Konstruktion. Die Lie-Algebra von $SO(n)$ wird durch reelle, antisymmetrische $n \times n$ Matrizen erzeugt. Eine Basis für diese ist zum Beispiel $L_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i < j$, wobei die Matrizen E_{ij} nur auf der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine eins, und sonst nur nullen haben, $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Die Generatoren L_{ij} erzeugen Drehungen in der (i, j)-Ebene und genügen den Vertauschungsrelationen

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{il}L_{kj} - \delta_{ik}L_{lj} + \delta_{jl}E_{ik} - \delta_{jk}L_{il}\,.$$

Die Generatoren von $C(n)$ wiederum genügen der Relation $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$. Man kann damit nachrechnen, dass die quadratischen Ausdrücke $\frac{1}{2}e_ie_j$ genau die Vertauschungsrelationen der L_{ij} erfüllen. Damit ist gezeigt, dass der Vektorraum, der durch die quadratischen Elemente von $C(n)$ der Form e_ie_j, $i < j$, aufgespannt wird, zusammen mit dem Kommutator als Lie-Klammer isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n)$ ist. Analog erhält man aus der komplexen Clifford-Algebra $C_{\mathbb{C}}(n)$ die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(n)$.

Um nun die Gruppe *Spin*(n) zu konstruieren, müssen wir die quadratischen Elemente von $C(n)$ exponentieren. Das ist relativ einfach, da $(\frac{1}{2}e_ie_j)^2 = -\frac{1}{4}$. Damit findet man

$$\exp(\theta(\frac{1}{2}e_ie_j)) = \cos(\frac{\theta}{2}) + e_ie_j\sin(\frac{\theta}{2})\,.$$

Wenn wir θ von 0 bis 4π laufen lassen, gibt dies genau eine der zu $U(1)$ isomorphen Ein-Parameter-Untergruppen von *Spin*(n). Man kann leich einsehen, dass diese Gruppenelemente, wenn sie auf einen Vektor wirken, $v \mapsto \exp(\theta(\frac{1}{2}e_ie_j))\,v\,(\exp(\theta(\frac{1}{2}e_ie_j)))^{-1}$, gerade eine Rotation des Vektors v um den Winkel $\frac{\theta}{2}$ in der (i, j)-Ebene bewirken. Wenn wir also in *Spin*(n) einmal den $U(1)$-Kreis voll durchlaufen, durchlaufen wir den Kreis von $SO(n)$-Rotationen in der (i, j)-Ebene zweimal. Dies kommt genau daher, dass *Spin*(n) eine zweifache Überlagerung der Gruppe $SO(n)$ ist.

Ganz analog zur adjungierten Aktion der Lie-Algbra $\mathfrak{spin}(n)$ auf sich selbst, gegeben durch die Kommutatoren, ist auch die Darstellung der Algebra auf Vektoren durch das Nehmen des Kommutators in der Clifford-Algebra realisiert. Eine infinitesimale Drehung eines Vektors v in der (i, j)-Ebene ist gegeben durch $v \mapsto [e_ie_j, v]$, was genau die infinitesimale Version der Darstellung auf dem Level der Gruppe ist, $v \mapsto \tilde{g}v(\tilde{g})^{-1}$, wobei $\tilde{g} \in$ *Spin*(n) durch Exponentieren des Generators e_ie_j erhalten wird.

Maximaler Torus. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall *Spin*$(2n)$. Der maximale Torus $i\tilde{T}$ dieser Lie-Gruppe kann leicht identifiziert werden, wenn man eine beliebige Identification $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ wählt: $T \subset U(n) \subset SO(2n)$ ist der maximale Torus von sowohl $U(n)$ als auch $SO(2n)$. Man kann zum Beispiel T als die Gruppe der $n \times n$ komplexen Diagonalmatrizen nehmen, deren k-ter Diagonaleintrag von der Form $\exp(\mathrm{i}\theta_k)$ ist. Diese Matrizen sind über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, so dass für $SO(2n)$ aus diesen Matrizen $2n \times 2n$ Blockdiagonalmatrizen mit 2×2 Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

werden. Jeder dieser Blöcke stellt eine Rotation in der $(2k-1, 2k)$-Ebene um den Winkel θ_k dar. Alle diese Drehungen kommutieren miteinander. Die Gruppen $SO(2n+1)$ mit ungerader Dimension haben den selber Rang wie die Gruppen $SO(2n)$ mit gerader Dimension. Daher kann man den selben maximalen Torus T verwenden, nur muss man die Matrizen um einen Eintrag erweitern: Als zusätzlicherm $(2n+1)$-ter, Diagonaleintrag fügt man einfach eine 1 hinzu, so dass T in die reellen $(2n+1) \times (2n+1)$ Matrizen eingebettet wird.

Die zweifache Überlagerung von $U(n)$, die die Einschränkung der zweifachen Überlagerung von $SO(2n)$ durch *Spin*$(2n)$ ist, kann auf verschiedene Weise beschrieben werden. Wir können sie zum Beispiel definieren als

$$\tilde{U}(n) = \{(A, u) \in U(n) \times S^1 : u^2 = \det A\}.$$

Der maximale Torus $\tilde{T}$ von *Spin*$(2n)$ kann dann leicht durch n Winkel $\tilde{\theta}_k$ beschrieben werden, nämlich als

$$\prod_k \left(\cos\tilde{\theta}_k + e_{2k-1}e_{2k}\sin\tilde{\theta}_k\right).$$

Dies ist in der Tat eine zweifache Überlagerung von T.

SPINOR DARSTELLUNGEN

Wir haben gesehen, dass die Gruppen *Spin*(n) eine Darstellung auf $\mathbb{R}^n$ besitzen, indem man einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit einem Element der Clifford-Algebra $C(n)$ identifiziert und die Aktion von $\tilde{g} \in$ *Spin*$(n) \subset C(n)$ gemäß $v \mapsto \tilde{g}\, v\, \tilde{g}^{-1}$ einführt, was ja in $C(n)$ definiert ist. Dies ist natürlich auch eine Darstellung von $SO(n)$, nämlich genau die fundamentale Darstellung auf Vektoren. Natürlich können wir aber nun v durch ein beliebiges Element von $C(n)$ ersetzen. Dies liefert immer noch eine Darstellung von *Spin*(n) und damit ebenso von $SO(n)$ auf $C(n)$, die mit der Darstellung auf $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann. Diese Darstellung ist reduzibel, die Zerlegung in irreps ist nichts anderes als die Zerlegung von $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$ in die Räume $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$, $k = 0, \ldots, n$. Offensichtlich liefern dabei die Fälle $k = 0$ und $k = n$ jeweils die triviale Darstellung, aber für $k = 1, \ldots, n-1$ erhalten wir fundamentale irreps. Der entscheidende Punkt ist nun, dass dies nicht alle fundamentalen Darstellungen von *Spin*(n). Diejenigen fundamentalen irreps, die man bei dieser Konstruktion verpasst, nennt man *Spinor-Darstellungen*. Dies sind echte Darstellungen von *Spin*(n), die bezüglich $SO(n)$ lediglich Darstellungen bis auf ein Vorzeichen (projektive Darstellungen) sind. Wir werden sehen, dass es für den geraden Fall *Spin*$(2n)$ zwei verschiedene irreduzible Halb-Spinor-Darstellungen mit der gleichen Dimension 2^{n-1} gibt, während man im ungeraden Fall *Spin*$(n = 2m+1)$ nur eine irreduzible Spinor-Darstellung der Dimension 2^n hat.

Spezialfälle. Die Spinor-Darstellungen sind zu speziellen Punkten in den Dynkin-Diagrammen assoziiert. Für $SO(2n+1)$, die einzige Spinor-Darstellung korresponidert zu dem Knoten am Ende des Diagramms, der mit den anderen Knoten durch eine Doppellinie verbunden ist. Für $SO(2n)$ sind die beiden Halb-Spinor-Darstellungen zu den beiden Knoten des assoziiert, mit denen sich das Ende des Diagramms verzweigt. Für kleine n gibt es einige interessante Spezialfälle aufgrund von Isomorphismen unter Lie-Gruppen mit kleinem Rang. Wir geben hier ein paar davon an:

- Die Gruppe *Spin*(2) ist einfach der Kreis, und ist eine zweifache Überlagerung des Kreises, der dir Gruppenmannigfaltigkeit von $SO(2)$ bildet.

- Die Gruppe *Spin*(3) ist isomorph zu $SU(2)$. Die Spinor-Darstellung ist gerade die fundamentale Darstellung von $SU(2)$. Das Dynkin-Diagramm ist einfach ein einzelner Knoten.

- Die Gruppe *Spin*(4) ist isomorph zu $SU(2) \times_{\mathbb{Z}_2} SU(2)$. Die Halb-Spinor-Darstellungen sind jeweils die fundamentalen Darstellungen der zwei Kopien von $SU(2)$. Das Dynkin-Diagramm besteht aus zwei nicht miteinander vebundenen Knoten.

- Wir haben den Isomorphismus *Spin*$(5) \cong Sp(2)$. Die Spinor-Darstellung auf $\mathbb{C}^4$ kann mit der fundamentalen Darstellung von $Sp(2)$ auf $\mathbb{H}^2$ identifiziert werden. Das Dynkin-Diagramm besteht aus zwei durch eine Doppellinie miteinander verbundene Knoten.

- Wir haben den Isomorphismus *Spin*$(6) \cong SU(4)$. Jede der beiden Halb-Spinor-Darstellungen auf $\mathbb{C}^4$ kann mit der fundamentalen Darstellung von $SU(4)$ auf $\mathbb{C}^4$ identifiziert werden. Das Dynkin-Diagramm besteht aus drei Knoten, die durch zwei einfache Linien miteinander verbunden sind.

- Das Dynkin-Diagramm von *Spin*(8) besteht aus insgesamt vier Knoten. Drei davon sind durch je eine einfache Linie mit dem zentralen vierten Knoten verbunden. Die Darstellungen, die zu den drei äußeren Knoten gehören, leben alle auf $\mathbb{C}^8$ und korrespondieren zu den zwei Halb-Spinor-Darstellungen und der Vektor-Darstellung. Man hat eine "Trialitäts-Symmetrie", die diese drei Darstellungen untereinander permutiert. Dies ist eine Gruppe mit $3! = 6$ Elementen der äußeren Automorphimsen von *Spin*(8).

Komplexe Clifford-Algebren. Spinoren lassen sich besonders schön auf komplexen Vektorräumen mit Hilfe von Clifford-Algebren konstruieren. Die komplexen Clifford-Algebren sind in der Vorlesung besprochen worden. Sie haben eine sehr einfache Struktur. Da es keine nicht-triviale Signatur gibt, haben wir lediglich die Algebren $C_{\mathbb{C}}(n) = C(n) \otimes \mathbb{C}$. Die Konstruktion der Spinor-Darstellung als invertierbare Elemente von $C(n)$ kann ebenfalls komplexifiziert werden, was die Gruppe *Spin*$(n, \mathbb{C})$ liefert, die Komplexifizierung von *Spin*(n), als die Gruppe der invertierbaren Elemente in $C_{\mathbb{C}}(n)$. In der Vorlesung haben wir erarbeitet, dass die $C_{\mathbb{C}}(n)$ induktiv gegeben sind durch $C_{\mathbb{C}}(1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $C_{\mathbb{C}}(2) = M(2, \mathbb{C})$, die komplexen 2×2 Matrizen, und $C_{\mathbb{C}}(n+2) = C_{\mathbb{C}}(n) \otimes_{\mathbb{C}} C_{\mathbb{C}}(2) = C_{\mathbb{C}}(n) \otimes_{\mathbb{C}} M(2, \mathbb{C})$. Offensichtlich kann dies vereinfacht werden zu

$$C_{\mathbb{C}}(2k) = M(2,\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M(2,\mathbb{C}) = M(2^k, \mathbb{C}), \quad C_{\mathbb{C}}(2k+1) = C_{\mathbb{C}}(1) \otimes M(2^k, \mathbb{C}) = M(2^k, \mathbb{C}) \oplus M(2^k, \mathbb{C}).$$

Wenn man das beweisen will, so kann man dies explizit dadurch tun, dass man generatoren h_1, h_2 für $C(2)$, $f_1, \ldots, f_n$ für $C(n)$ und $e_1, \ldots, e_{n+2}$ für $C(n+2)$ wählt. Der Isomorphismus, der für die Induktion benötigt wird, ergibt sich dann durch die Abbildung $e_1 \mapsto 1\!\!1 \otimes h_1$, $e_2 \mapsto 1\!\!1 \otimes h_2$ und $e_{k+2} \mapsto \mathrm{i} f_k \otimes h_1 h_2$ für $k = 1, \ldots n$. Man kann dann nachrechnen, dass diese Abbildung die Struktur der Clifford-Algebra intakt läßt (also die algebraischen Realtionen nicht ändert) und surjektiv ist. Damit ist diese Abbildung ein Isomorphismus zwischen Algebren.

Spinoren. Wir konzentrieren uns auf den geraden Fall $n = 2k$. Die komplexifizierte Clifford-Algebra ist dann einfach die Algebra der $2^k \times 2^k$ komplexen Matrizen. Ein Spinor-Raum S ist dann ein Vektorraum, auf dem diese Matrizen operieren. Genauer:

Ein Spinor-Modul S der Clifford-Algebra $C_{\mathbb{C}}(2k)$ ist gegeben durch einen 2^k-dimensionalen komplexen Vektorraum S zusammen mit einer Identifikation $C_{\mathbb{C}}(2k) = End(S)$ der Clifford-Algebra mit der Algebra der linearen Endomorphismen auf S.

Ein Spinor-Raum ist also ein komplexer Vektorraum S zusammen mit einer Wahl, wie die $2k$ Generatoren e_i der Clifford-Algebra als lineare Operatoren auf ihm operieren sollen. Eine explizite Konstruktion eines solchen Raumes S zusammen mit den korrekten Operatoren funktioniert mit Hilfe von Techniken der äußeren Algebra. Dazu gehen wir noch einmal kurz in den reellen Fall zurück und betrachten zunächst $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$. Zu jedem Vektor v existiert ein Operator auf $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$, der durch die äußere Multiplikation mit v gegeben ist, $v\wedge : a \mapsto v \wedge a$. Hat man ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$, so hat man ein induziertes auf $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$, bei dem äußere Produkte (Dach-Produkte) von orthonormalen Basis-Vektoren orthonormal sind. Bezüglich dieses inneren Produktes existiert zu $v\wedge$ ein adjungierter Operator $v\vee$, der sogenannte Kontraktions-Operator. Ist a von der Form $a = a' \wedge v \wedge a''$, so ist $v \vee a = (-1)^{F(a)} a' \wedge a'' \langle v, v\rangle$. Ansonsten ist $v \vee a = 0$. In Physiker-Notation können wir schreiben:

$$a^\dagger(v) = v\wedge, \quad a(v) = v\vee, \quad a^\dagger(e_i) = a_i^\dagger, \quad a(e_i) = a_i.$$

Die Algebra, die diese Operatoren erfüllen, ist die Algebra der kanonischen Antikommutator-Relationen:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Algebra der kanonischen Antikommutator-Relationen mit $2n$ Generatoren $a_i, a_i^\dagger$, $i = 1, \ldots, n$, definiert durch die Relationen $\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0$ und $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$.

Wir haben gesehen, dass dies Algebra durch Operatoren auf $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$ realisiert werden kann. Eine Identifikation dieser Algebra mit $C(n)$ ist einfach: $v \in C(n) \to a^\dagger(v) - a(v)$. Das sieht man sofort ein, indem man

$$v^2 = (a^\dagger(v) - a(v))^2 = (a^\dagger(w))^2 + (a(v))^2 - \{a^\dagger(v), a(v)\} = -\|v\|^2 1\!\!1$$

ausrechnet. Für gerades $n = 2k$ können wir nun $\bigwedge^* \mathbb{R}^n$ komplexifizieren um eine komplexe Darstellung von $C_{\mathbb{C}}(2k)$ zu erhalten. Die Dimension dieser Darstellung ist 2^{2k}. Dies kann also nicht die 2^k-dimensionale irreep auf einem Spinor-Raum S sein. Wir müssen also einen Weg finden, eine einzelne irreduzible Darstellung S aus der reduziblen Darstellung $\bigwedge^* \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ herauszupicken. Man tut dies mit Hilfe einer komplexen Struktur J.

Wir wählen also eine komplexe Struktur J auf $V = \mathbb{R}^{2k}$. Damit haben wir eine Zerlegung $V \otimes \mathbb{C} = W_J \oplus \bar{W}_J$, wobei W_J der Eigenraum von J zum Eigenwert $+\mathrm{i}$ ist, $\bar{W}_J$ der J-Eigenraum zum Eigenwert $-\mathrm{i}$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine orthogonale komplexe Struktur wählen, also eine, die $\langle Jv, Jw\rangle = \langle v, w\rangle$ genügt. Weiter führen wir *isotrope Unterräume* ein. Ein Unterraum $W \subset V$ mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist *isotrop*, wenn $\langle w_1, w_2\rangle = 0$ für alle $w_1, w_2 \in W$ gilt. In der Tat sind die Räume W_J und $\bar{W}_J$ isotrope Unterräume von $V \otimes \mathbb{C}$, denn wir finden für $w_1, w_2 \in W_J$ sofort $\langle w_1, w_2\rangle = \langle Jw_1, Jw_2\rangle = \langle \mathrm{i}w_1, \mathrm{i}w_2\rangle = -\langle w_1, w_2\rangle$, da das innere Produkt ein reelles ist. Da W_J isotrop ist, ist die Clifford-Algebra $C(W_J) \subset C_{\mathbb{C}}(2k)$, die durch die Elemente von W_J erzeugt wird, nicht anderes als die Grassmann-Algebra bzw. die äußere Algebra $\bigwedge^* W_J$, denn die durch das innere Produkt induzierte quadratische Form ist auf W_J identische null. Ganz genauso kann man daher $C(\bar{W}_J)$ mit $\bigwedge^* \bar{W}_J$ identifizieren. Wie auch immer man das konkret realisiert, es geht darum, den Spinor-Raum S als die äußere Algebra eines solchen isotropen Raumes, z.B. $\bigwedge^* W_J$, zu konstruieren, da diese die richtige Dimension 2^k hat. Wir müssen also zeigen, dass $C_{\mathbb{C}}(2k)$ mit den Endomorphismen auf diesem Raum identifiziert werden kann. In wie weit unsere Konstruktion von der Wahl von J abhängt, werden wir erst später untersuchen. Hier nehmen wir die Standardwahl für die komplexe Struktur, indem wir für $j = 1, \ldots, k$ setzen: $w_j \equiv e_{2j-1} + \mathrm{i}e_{2j}$. Wir können damit explizit einsehen, das $C_{\mathbb{C}}(2k) \cong \mathit{End}(\bigwedge^* \mathbb{C}^k)$ ist.

Wir verwenden eine Definition der Erzeuger und Vernichter der kanonischen Antikommutator-Algebra auf $\bigwedge^* \mathbb{C}^k$, indem wir $e_{2j-1} = a_j^\dagger - a_j$ und $e_{2j} = -\mathrm{i}(a_k^\dagger + a_j$ setzen. Die Antikommutator-Relationen der a_j und $a_j^\dagger$ implizieren dann ide Clifford-Algebra-Relationen $\{e_i, e_j\} = -\delta_{ij}$. Mit diesem expliziten Modell ist $S = \bigwedge \mathbb{C}^k$ mit einer expliziten Aktion der Clifford-Algebra. Wir können also einfach ablesen, wie die Elemente von $\mathfrak{spin}(2k)$ auf S operieren, und wir können damit den Charakter von S als *Spin*$(2k)$ Darstellunge berechnen. Die k kommutierenden Elemente des maximalen Torus von $\mathfrak{spin}(2k)$ sind die Elemente $\frac{1}{2}e_{2j-1}e_{2j}$, die in der Darstellung auf $\bigwedge^* \mathbb{C}^k$ gegeben sind als $\frac{1}{2}e_{2j-1}e_{2j} = -\mathrm{i}\frac{1}{2}(a_j^\dagger - a_j)(a_j^\dagger + a_j) = \mathrm{i}\frac{1}{2}[a_j, a_j^\dagger]$. Die Eigenwerte des Kommutators $[a_j, a_j^\dagger]$ auf $\bigwedge^* \mathbb{C}^k$ sind ± 1, je nach dem, ob der Basisvektor e_j in dem Wort aus Dach-Produkten vorkammt, das den Eigenvektor bildet. Die Gewichte der Darstellung S daher k-Tupel aus Werten $\pm\frac{1}{2}$, es gibt also genau 2^k verschiedene Gewichte. Mit dieser Normierung hat man die die schöne Eigenschaft, dass Darstellungen von *Spin*$(2k)$, die ganzzahlige Gewihte haben, auch Darstellungen von $SO(2k)$ sind, während Darstellungen mit halbzahligen Gewichten eigentliche Darstellungen von *Spin*$(2k)$ sind. Die Zerlegung in die Halb-Spinor-Darstellungen S^+ und S^- entspricht gerade der Zerlegung der Gewichte in solche mit gerader oder ungerader Anzahl an negativen $-\frac{1}{2}$ Einträgen. Mit der Standardwahl für positive Wurzeln ist das Höchstgewicht für eine der Halb-Spinor-Darstellungen gerade $(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \ldots, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, und für die andere lautet es $(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \ldots, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Man beachte, dass dies nicht die Gewichte der Darstellung von $U(k) \subset SO(2k)$ auf $\bigwedge^* \mathbb{C}^k$ sind. Prüft man, wie nämlich die Lie-Algebra des maximalen Torus von $U(k)$ auf $\bigwedge^* \mathbb{C}^k$ operiert, so findet man, dass alle Gewichte in $\{0, 1\}$ sind. So sind also die Gewichte von $\bigwedge^* \mathbb{C}^k$ dieselben wie die von S, verschoben um einen fixen Gewichtsvektor $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Anders gesagt, sollte man die Darstellung S nicht als $\bigwedge^* \mathbb{C}^k$ auffassen, sondern genauer als $\bigwedge^* \mathbb{C}^k \otimes (\bigwedge^k \mathbb{C}^k)^{-1/2}$. Der zusätzliche Faktor verschwindet, wenn man zu projektiven Darstellungen $\mathbb{P}(S)$ der komplexen Geraden in S übergeht, da $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\bigwedge^* \mathbb{C}^k)$. Dies entspricht der Tatsache, dass unsere Konstruktion von S allein mit dem Wissen $\mathit{End}(S) = C_{\mathbb{C}}(2k)$ auf kanonische Weise nur $\mathbb{P}(S)$ festlegt, nicht S selbst. Multiplikation von S mit einem Skalar ändert nämlich nicht $\mathit{End}(S)$.

Komplexe Struktur. Die soeben durchgeführte Konstruktion von S verwendete eine spezifische Wahl der komplexen Struktur J. Allgemein erlaubt eine Wahl von J eine Zerlegung $\mathbb{R}^{2k} \otimes \mathbb{C} = W_J \oplus \bar{W}_J$. Damit kann S also $\bigwedge^* W_J$ konstruiert werden. Allerdings ist es für das Verständnis des Transformationsverhaltens unter dem maximalen Torus von *Spin*(n), sich S als $\bigwedge^* W_J \otimes (\bigwedge^k W_J)^{-1/2}$ vorzustellen. Gehen wir zu der Realisierung durch eine Algebra der kanonischen Antikommutator-Relationen über, erzeugt durch die Operatoren $a_j^\dagger$ und a_j, so können wir S durch Anwenden dieser Operatoren auf einen "Vakuum-Vektor" Ω_J aufbauen. Diese Ω_J hängt von der Wahl der komplexen Struktur J ab, und transformiert unter der Wirkung des maximalen Torus von *Spin*$(2k)$ gerade als $(\bigwedge^k \bar{W}_J)^{1/2}$. Hat man eine Spinor-Darstellung S gegeben, so kann man sich Ω_J als einen Vektor in S vorstellen, der $\bar{w} \cdot \Omega_J = 0$ für alle $\bar{w} \in \bar{W}_J$ erfüllt. Diese Beziehung legt Ω_J bis auf einen skalaren Faktor fest, und liefert ein Identifizierung zwischen orthogonalen komplexen Strukturen J und Geraden in S. Nicht alle Elemente von $\mathbb{P}(S)$ korrespondieren zu möglichen J. Diejenigen Elemente, die zu einem J gehören, nennt man Geraden, die durch *reine Spinoren* erzeugt werden. Die Beziehung zwischen reinen Spinoren und orthogonalen komplexen Strukturen J kann äquivalent als eine Beziehung zwischen reinen Spinoren und isotropen Unterräumen von $\mathbb{R}^{2k} \otimes \mathbb{C}$ mit maximaler Dimension angesehen werden, nämlich den Räumen $\bar{W}_J$.

Sobald man eine Wahl für J gemacht hat, J_0, definiert dies ein Modell für den Spinor-Raum $\bigwedge^* W_{J_0}$, und in diesem Modell ist $\Omega_{J_0} = 1$. Ein Wechsel der komplexen Struktur von J_0 zu J, so dass $W_J = \mathrm{graph}(\sigma : W_{J_0} \leftarrow \bar{W}_{J_0})$, identifiziert J mit einer Abbildung $\sigma \in W_{J_0} \times \bar{W}_{J_0}^*$. Mit Hilfe des inneren Produktes und der Tatsache, dass W_J isotrop ist, kann man zeigen, dass $\sigma \in \bigwedge^2 W_{J_0}$. Damit folgt dann, dass die Wahl $\Omega_J = \exp(\frac{1}{2}\sigma)$ die Gleichung $\bar{w} \cdot \Omega_J = 0 \, \forall \bar{w} \in \bar{W}_J$ für dieses Modell von S löst. Es ist also nicht ganz verwunderlich, dass in unseren expliziten Formeln für Supersymmetrie-Transformationen, generiert durch Spinoren, die komplexe Strukur J auftaucht, da die Konstruktion der Spinoren eben von der Wahl von J abhängt.

Der Raum sämtlicher orthogonaler komplexer Strukturen auf $\mathbb{R}^{2k}$ kann mit dem homogenen Raum $O(2k)/U(k)$ identifiziert werden. Explizit heißt das, dass eine orthogonale komplexe Struktur J durch eine orthogonale Abbildung $J \in O(2k)$ dargestellt werden kann. Dieser Raum hat zwei Komponenten, korrespondierend zu einer Wahl der Orientierung. Meist betrachtet man $J \in SO(2k)$. Für jedes solche J gibt es eine Untergruppe von Transformationen, die die Zerlegung $\mathbb{R}^{2k} \otimes \mathbb{C}$ in Eigenräume von J (und damit die komplexe Struktur) erhält. Diese Untergruppe ist isomorph zu $U(k)$. Also können wir den Raum der orientierungserhaltenden orthogonalen komplexen Strukturen als $SO(2k)/U(k) = \mathit{Spin}(2k)/\tilde{U}(k)$ auffassen.

Linienbündel. Man kann das ganze jetzt etwas mathematisch hochtrabender ausdrücken und vertiefen. Über dem Raum $SO(2k)/U(k) = \mathit{Spin}(2k)/\tilde{U}(k)$ gibt es ein komplexes Linienbündel L, dessen Faser über J die komplexe Gerade in $\mathbb{P}(S)$ ist, die von Ω_J erzeugt wird. Dass Ω_J gerade als $(\bigwedge^k W_J)^{-1/2}$ transformiert, korrespondiert zu der global gültigen Tatsache, dass als Linienbündel $L \otimes L = \det^{-1}$ ist, wobei $\det$ das Linienbündel ist, dessen Faser über J gerade $\bigwedge^k W_J$ ist.

Der Raum *Spin*$(2k)/\tilde{U}(k)$ ist eine der verallgemeinerten Flaggen-Mannigfaltigkeiten, die auftreten, wenn man das Borel-Weil-Bild für die kompakte Gruppe *Spin*$(2k)$ entwickelt. Dieser Raum ist daher eine komplexe Mannigfaltigkeit mir einer Beschreibung in Form von Quotienten von komplexen Lie-Gruppen, $SO(2k)/U(k) =$ *Spin*$(2k)/\tilde{U}(k) =$ *Spin*$(2k, \mathbb{C}/P$, wobei P die sogenannte parabolische Untergruppe von *Spin*$(2k, \mathbb{C}/P$ ist. Das Linienbündel L sit ein holomorphes Linienbündel, und korrespondiert zu der Borel-Weil-Konstraktion eines Linienbündels mit Höchstgewicht $(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \ldots, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$. Somit ist es das holomorphe Linienbündel, das zu einer der Halb-Spinor Darstellungen, nämlich S^+ gehört, und das Borel-Weil-Theorem liefert eine Konstruktion von S^+ als $S^+ = \Gamma_{hol}(L)$, also als dem Raum der holomorphen Schnitte in dem Linienbündels L. Diese Konstruktion ist, anders als die Konstruktion mit Hilfe komplexer äußerer Algebra, unabhängig von einer festen Wahl der komplexen Struktru J. Stattdessen verwendet sie die globale Geometrie des Raumes aller komplexen Strukturen.

ZUSAMMENFASSUNG

Spinoren sind Objekte, die sich ähnlich, aber eben nicht genau, wie Vektoren verhalten. Unter Drehungen um 2π ändern sie ihr Vorzeichen. Spinoren wurden von Wolfgang Pauli und Paul Dirac eingeführt, um die Eigenschaft des Spin von Teilchen beschreiben zu können. Der Begriff "Spinor" wurde von Paul Ehrenfest geprägt. Allerdings ist die Mathematik, die hinter Spinoren steckt, wohl zu großen Teilen von Elie Cartan bereits um 1913 angedacht worden.

Ein n-dimensionaler Spinor eines bestimmten Typs ist ein Element einer spezifischen *projektiven* Darstellung der Dreh-Gruppe $SO(n, \mathbb{R})$, oder allgemeiner der eigentlichen Lorentz-Gruppe $SO(p, q, \mathbb{R})$, $p + q = n$, zu einer Raum-Zeit mit nicht-trivialer Signatur. Der entscheidende Punkt ist, dass diese projektive Darstellung äquivalent zu einer gewöhnlichen (nicht projektiven) Darstellung der *universellen Überlagerungsgruppe* von $SO(p, q, \mathbb{R})$ ist. Diese universelle Überlagerungsgruppe ist eine reelle Lie-Gruppe, genannt *Spin*(p, q).

Der bekannteste Typ eines Spinors ist der Dirac-Spinor. Dieser ist ein Element der fundamentalen Darstellung der komplexifizierten Clifford-Algebra $C(p, q)$, in die *Spin*(p, q) eingebettet werden kann. In geraden Dimensionen $n = p + q$ ist diese Darstellung reduzibel, wenn sie als Darstellung von *Spin*(p, q) betrachtet wird, und kann in zwei irreps zerlegt werden, links-händige und rechts-händige Weyl-Spinoren. Diese beiden Darstellungen können nur durch die Aktion der Paritäts-Transformation voneinander unterschieden werden, die kein Element von *Spin*(p, q) ist, aber in $C(p, q)$ enthalten ist. Unter bestimmten Umständen kann die reelle, nicht komplexifizierte, Clifford-Algbera $C(p, q)$ eine kleinere, reelle, Darstellung besitzen, die Majorana-Spinor Darstellung. Wenn dies für eine gerade Dimension n möglich ist, so kann dieser Majorana-Spinor manchmal in zwei Majorana-Weyl-Spinoren zerlegt werden. Nur der Dirac-Spinor existiert für jede Raum-Zeit-Dimension n. Dirac-Spinoren sind komplexe Darstellungen, während Majorana-Spinoren reelle Darstellungen sind.

Nutzt man die Einbettung von $SU(n) \subset SO(2n)$ aus, so kann man zeigen, dass sowohl $2n$-dimensionale, als auch $(2n+1)$-dimensionale Dirac-Spinoren als Vektoren mit $2n$ komplexen Komponenten repräsentiert werden können.

Etwa um 1930 erfanden Dirac, Piet Hein und andere am Niels-Bohr-Institut ein Spiel, genannt *Tangloids*, mit dem der Spinor-Kalkül gelehrt und modelliert werden kann. Das Spiel ist für zwei Spieler. Es besteht aus zwei flachen Holzblöcken, die je drei kleine Bohrungen besitzen. Die beiden Holzblöcke sind durch drei Schnüre, miteinander verbunden, deren Enden durch die Bohrungen geführt und mit Knoten fixiert werden. Der erste Spieler hält einen Block fest, während der zweite Spieler den zweiten Block um eine beliebige Achse um 4π (also zwei volle Drehungen) rotiert. Der erste Spieler muss dann versuchen, die Schnüre zu entwirren, *ohne* einen der beiden Blöcke drehen zu dürfen. Nur Translationen (Verschiebungen) der Blöcke sind erlaubt. Anschließend werden die Rollen der Spieler getauscht. Gewonnen hat der Spieler, dem es am schnellsten gelingt, die Schnüre zu entwirren.